

Über eine Verallgemeinerung
des Begriffes "konvexe Funktion".

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung der Doktorwürde
der Philosophischen Fakultät
der Philipps-Universität zu Marburg

vorgelegt von

Uwe Troltenier

aus Eversmeer (Ostfriesland)

Marburg 1953

Über eine Verallgemeinerung
des Begriffes "konvexe Funktion".

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung der Doktorwürde
der Philosophischen Fakultät
der Philipps-Universität zu Marburg

vorgelegt von

Uwe Troltenier

aus Eversmeer (Ostfriesland)



Marburg 1953

Als Dissertation angenommen am 7.12.1953
Berichterstatter: Professor Dr. Krafft
Mitberichterstatter: Professor Dr. Reidemeister
Tag der mündlichen Prüfung: 16.12.1953

Gedruckt mit Genehmigung der Fakultät

I n n h a l t .

Literatur

	Seite
<u>I. Einleitung</u>	
§ 1 : Überblick über die Theorie der konvexen Funktionen; Inhalt und Form der vorliegenden Arbeit	1
§ 2 : Definitionen	3
§ 3 : Bemerkungen zu den Definitionen	5
<u>II. Lösungen von $L\langle y \rangle = 0$</u>	
§ 1 : Einführung spezieller Lösungen von $L\langle y \rangle = 0$	8
§ 2 : Eigenschaften der $g(x_0, x)$	8
§ 3 : Anschauliche Deutung der Definitionen 1 und 1*	10
<u>III. Allgemeine Eigenschaften der m-ek. Funktionen</u>	
§ 1 : Abbildung des Intervalls J durch A(x)	13
§ 2 : Bildung von Untermengen von J und ihre ersten Anwendungen	14
§ 3 : Stetigkeit und Beschränktheit m-ek. Funktionen	17
§ 4 : Zur Differenzierbarkeit m-ek. Funktionen	20
§ 5 : "Stützfunktionen" bei m-ek. Funktionen	22
<u>IV. Allgemeine Eigenschaften der ek. Funktionen</u>	
§ 1 : Stetigkeit und Beschränktheit ek. Funktionen	23
§ 2 : Zur Differenzierbarkeit ek. Funktionen	25
<u>V. Fortsetzung der Theorie der m-ek. Funktionen</u>	
§ 1 : Einführung von Nebenfunktionen einer m-ek. Funktion	28
§ 2 : Die "obere Grenze" der m-ek. Funktionen	31
§ 3 : Der Satz von Bernstein und Doetsch für m-ek. Funktionen	32
<u>VI. Beispiele ek. Funktionen</u>	
§ 1 : Über zweimal differenzierbare ek. Funktionen	34
§ 2 : Funktionen, die abschnittsweise aus ek. Funktionen bestehen	37

VII. Über monotone Funktionen, die aus ek. gebildet werden

- § 1 : Definition und Monotonie der $m_{\varphi}(x_0, x)$;
ihre anschauliche Bedeutung 40
- § 2 : Das Analogon zur Monotonie der Ableitung
von differenzierbaren konvexen Funktionen 41
- § 3 : Einige formale Eigenschaften der $m_{\varphi}(x_0, x)$ 45
- § 4 : Das Analogon zum einbeschriebenen Sehnen- und zum
umbeschriebenen Stützgeradenpolygon bei konvexen
Funktionen 47

VIII. Die "Knickfunktionen"

- § 1 : Definition und erste Eigenschaften der
Knickfunktionen $\hat{\varphi}(x, t)$ 51
- § 2 : Beschreibung des Verlaufs ek. Funktionen durch
den Verlauf der $\hat{\varphi}(x, t)$ 53

IX. Integraldarstellungen ek. Funktionen

- § 1 : Integraldarstellung vermittelt der Funktion $\mu_{\varphi}(t)$ 57
- § 2 : Integraldarstellung vermittelt der
Knickfunktionen $\hat{\varphi}(x, t)$ 58
- § 3 : Eindeutigkeit der Integraldarstellung durch die $\hat{\varphi}$ 65

X. Ungleichungen für Integrale, in deren Integranden
eine ek. Funktion auftritt

- § 1 : Zwei spezielle Sätze 66
- § 2 : Das Minimum der Funktion $H(t)$ 67
- § 3 : Zum Satz von Frank 70
- § 4 : Zur Entwicklung einer ek. Funktion nach den
Eigenfunktionen eines Randwertproblems 74

XI. Anhang: Benutzte Regeln über Stieltjes-Integrale

76

L i t e r a t u r . =====

1. J.Jensen, Sur les fonctions convexes et les inégalités entre leurs valeurs moyennes, Acta math. 30 (1906), S. 175
2. F.Bernstein und G.Doetsch, Zur Theorie der konvexen Funktionen, Math. Annalen 76 (1915), S. 514
3. G.Hamel, Math. Annalen 60 (1905), S. 459
4. E.Kamke, Zur Definition der affinen Abbildung, Jahresber. d. DMV 36 (1927)
5. Ph.Frank und G.Pick, Distanzschätzungen im Funktionenraum I, Math. Annalen 76 (1915), S. 354
6. W.Blaschke und G.Pick, Distanzschätzungen im Funktionenraum II, Math. Annalen 77 (1916), S. 277, mit Anhang von Ph.Frank
7. H.Noll, unveröffentlichte Staatsexamensarbeit, Marburg 1952
8. M.Krafft, Über konvexe Funktionen, Math. Zeitschrift 40 (1936), S. 469
9. M.Krafft, Zwei Sätze aus Gauß' Theoria combinationis observationum, Deutsche Mathematik 2 (1937), S. 624
10. M.Krafft, unveröffentlichte Arbeit, vorgetragen im Mathem. Seminar Marburg, Winter-Semester 1951/52
11. K.Knopp, Über die maximalen Abstände und Verhältnisse verschiedener Mittelwerte, Math. Zeitschrift 39 (1935), S. 768

I. Einleitung.

=====

§ 1 : Überblick über die Theorie der konvexen Funktionen,

Inhalt und Form der vorliegenden Arbeit.

In seiner grundlegenden Arbeit nennt J.Jensen ¹⁾ eine reelle, auf einem Intervall der Abszissenachse erklärte Funktion $\varphi(x)$ "konvex", wenn

$$\frac{\varphi(a) + \varphi(b)}{2} \geq \varphi\left(\frac{a+b}{2}\right),$$

und "konkav", wenn

$$\frac{\varphi(a) + \varphi(b)}{2} \leq \varphi\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Im Falle $a < b$ läßt sich die letzte Ungleichung auch in der Form

$$(1^*) \quad \begin{vmatrix} 1 & a & \varphi(a) \\ 1 & \frac{a+b}{2} & \varphi\left(\frac{a+b}{2}\right) \\ 1 & b & \varphi(b) \end{vmatrix} \leq 0$$

schreiben. Anstelle der Jensenschen Bezeichnung "konvex" hat sich heute die Bezeichnung "nach unten konvex" eingebürgert, und anstelle von "konkav" die Bezeichnung "nach oben konvex".

In der genannten Arbeit ¹⁾ bewies Jensen u.a., daß eine nach oben konvexe, nach unten beschränkte Funktion $\varphi(x)$ stetig sowie rechts- und linksseitig differenzierbar ist und daß $\varphi'_- \leq \varphi'_+$. Dagegen zeigten F.Bernstein und G.Doetsch ²⁾, daß für nach oben konvexe, nicht nach unten beschränkte Funktionen $\varphi(x)$ der Fall eintreten kann, daß die Punkte $(x, \varphi(x))$ auf einem Gebiet der (x, y) -Ebene überall dicht liegen. Daß tatsächlich derartige Funktionen existieren, wies G.Hamel ³⁾ nach, indem er für die Funktionalgleichung

$$f(x) + f(y) = f(x + y),$$

die als Spezialfall in den obigen Funktionalungleichungen enthalten ist, mit Hilfe des Wohlordnungssatzes unstetige Lösungen $f(x)$

¹⁾ Dieser Hinweis bezieht sich wie alle folgenden auf das Literaturverzeichnis.

angab. E.Kamke ⁴⁾ berichtete über weitere damit zusammenhängende Fragen.

Aus den Jensenschen Untersuchungen folgt für nach oben konvexe, nach unten beschränkte Funktionen leicht

$$(1) \quad \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \varphi(x_1) \\ 1 & x_2 & \varphi(x_2) \\ 1 & x_3 & \varphi(x_3) \end{vmatrix} \leq 0 \quad \text{falls } x_1 < x_2 < x_3,$$

eine Erweiterung von (1*). - Diesen aus (1*) folgenden Satz (1) legten nun W.Blaschke, G.Pick und Ph.Frank ihren Arbeiten ⁵⁾, ⁶⁾ als Definition einer nach oben konvexen Funktion zu Grunde. Für positive, der Bedingung (1) genügende Funktionen $\varphi(x)$ gaben sie u.a. eine Integraldarstellung, eine Integralungleichung und eine Abschätzung des 1.Fourier-Koeffizienten an. Kürzlich untersuchte H.Noll ⁷⁾, wie sich diese Ergebnisse ändern, wenn man statt (1) eine nicht negative Determinante voraussetzt.

Ebenfalls von (1) ausgehend, zeigte M.Krafft ⁸⁾ die Gültigkeit der erwähnten Integralungleichung auf anderem Wege und unter abgeschwächten Voraussetzungen. Ferner wies M.Krafft ⁹⁾ darauf hin, daß zwei Sätze aus Gauß' "Theoria combinationis observationum" Aussagen über konvexe Funktionen sind und gab unter diesem Gesichtspunkt neue Beweise an; ganz entsprechend deutete er ¹⁰⁾ einige Sätze von K.Knopp ¹¹⁾.

Im folgenden wird eine Verallgemeinerung der Bedingungen (1*) und (1) vorgenommen und die oben skizzierte Theorie der konvexen Funktionen auf diese in einem allgemeineren Sinne konvexen Funktionen übertragen. Der Klarheit halber erhalten die Funktionen, die der Verallgemeinerung von (1) genügen, eine andere Bezeichnung ("extremalkonvex") als die, die der Verallgemeinerung von (1*) genügen ("m-extremalkonvex"). Daß wir den Begriff einer nach oben konvexen Funktion verallgemeinern (und nicht den einer nach unten konvexen), liegt einerseits daran, daß die wichtigsten der genannten Arbeiten, nämlich ⁵⁾, ⁶⁾, ⁸⁾, die nach oben konvexen Funktionen behandeln. Zum anderen ist es in der Theorie der zweidimensionalen konvexen Funktionen, der sog. subharmonischen Funktionen, üblich, die Definition

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \leq 0$$

zu Grunde zu legen, was der Konvexität nach oben entspricht.

Wenn im folgenden von "konvex" die Rede ist, so sei stets "nach oben konvex" darunter verstanden.

Die vorliegende Arbeit ist in Abschnitte geteilt; diese sind in Paragraphen gegliedert. Die Sätze und Definitionen werden durchlaufend numeriert; die Formel-Nummern beginnen in jedem Abschnitt neu.

Sätze und Definitionen, die die m -extremalkonvexen Funktionen betreffen, sind mit $*$ bezeichnet. So ist Satz 6 $*$ eine Aussage über m -extremalkonvexe Funktionen, die analog ist der in Satz 6 enthaltenen Aussage über extremalkonvexe Funktionen.

Wichtiges Beweishilfsmittel sind Stieltjes-Integrale. Aus diesem Grund wurden einige Eigenschaften derselben im Anhang zusammengestellt.

§ 2 : Definitionen.

Die Determinantenbedingung (1) läßt sich in allgemeinerer Form schreiben. Sind nämlich $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ vier reelle Zahlen, die der einzigen Bedingung unterworfen sind, daß $\alpha\delta - \beta\gamma > 0$, so hat

$$D(x_1, x_2, x_3) = \begin{vmatrix} \alpha + \beta x_1 & \gamma + \delta x_1 & \varphi(x_1) \\ \alpha + \beta x_2 & \gamma + \delta x_2 & \varphi(x_2) \\ \alpha + \beta x_3 & \gamma + \delta x_3 & \varphi(x_3) \end{vmatrix}$$

dasselbe Vorzeichen wie die Determinante in (1), und daher kann auch mit D der Begriff "konvex" erklärt werden. Die in D auftretenden Funktionen

$$u(x) = \alpha + \beta x, \quad v(x) = \gamma + \delta x$$

haben eine positive Wronski-Determinante

$$W(x) = \begin{vmatrix} u & v \\ u' & v' \end{vmatrix};$$

sie sind ein Paar linear unabhängiger Lösungen der linearen Differentialgleichung 2.Ordnung

$$L \langle y \rangle = y'' = 0.$$

Hieraus ergibt sich zwanglos folgende Verallgemeinerung von "konvex":

Def.1 : Es sei J ein (offenes oder abgeschlossenes) Intervall der Abszissenachse. Dort sei $p(x)$ positiv und stetig, $q(x)$ stetig, und die Differentialgleichung

$$L \langle y \rangle = \frac{d}{dx} (p \cdot y') + q \cdot y = 0$$

habe eine auf J positive Lösung $w(x)$. Es seien $u(x), v(x)$ zwei linear unabhängige Lösungen von $L \langle y \rangle = 0$ in einer Reihenfolge,

daß die Wronski-Determinante

$$W(x) = \frac{C}{p(x)} = \begin{vmatrix} u & v \\ u' & v' \end{vmatrix} \quad (C = \text{const} > 0)$$

positiv ist.

Unter diesen Voraussetzungen heiße eine auf J erklärte Funktion $\varphi(x)$ extremalkonvex (ek.), wenn für $x_1 < x_2 < x_3$ (x_1, x_2, x_3 aus J) stets gilt

$$(2) \quad D_{\varphi}(x_1, x_2, x_3) = \begin{vmatrix} u(x_1) & v(x_1) & \varphi(x_1) \\ u(x_2) & v(x_2) & \varphi(x_2) \\ u(x_3) & v(x_3) & \varphi(x_3) \end{vmatrix} \leq 0.$$

Dies ist eine Verallgemeinerung von (1); die analoge Verallgemeinerung von (1*) wäre die Forderung

$$(1^{*'}) \quad D_{\varphi}(a, \frac{a+b}{2}, b) \leq 0 \quad \text{für } a < b.$$

Man kann jedoch noch einen Schritt weiter gehen, indem man das in (1*) und (1'*) auftretende arithmetische Mittel $\frac{a+b}{2}$ durch einen allgemeineren Mittelwert ¹¹⁾ ersetzt:

Definition eines allgemeinen Mittelwertes:

Es sei J ein (offenes oder abgeschlossenes) Intervall der Abszissenachse. Jede für a und b aus J erklärte Funktion $m(a, b)$ heiße Mittelwert, wenn es eine auf J erklärte, streng monotone und stetige Funktion $A(x)$ gibt, für die stets

$$(3) \quad A(m(a, b)) = \frac{A(a) + A(b)}{2}.$$

Man erkennt leicht, daß $m(a, b)$ wirklich ein "Mittelwert" ist: $m(a, b)$ liegt zwischen a und b , falls $a \neq b$, und es ist $m(a, a) = a$. Darüberhinaus fallen die üblichen Mittel unter die obige Definition. Setzt man nämlich mit reellem n ($n \neq 0$)

$$A(x) = x^n,$$

so wird

$$m(a, b) = \left(\frac{a^{\frac{1}{n}} + b^{\frac{1}{n}}}{2} \right)^n,$$

was für $n = 1$ das arithmetische, für $n = -1$ das harmonische Mittel ist. Für $A(x) = \lg x$ ergibt sich das geometrische Mittel.

Als Verallgemeinerung von (1*) erhält man so anstelle der zunächst naheliegenden Bedingung (1'*) die folgende.

Def.1*: Die reelle Funktion $\varphi(x)$ sei erklärt auf dem (offenen oder abgeschlossenen) Intervall J der Abszissenachse; die Funktionen $u(x)$, $v(x)$ seien von der in Def.1 genannten Art, und $m(a,b)$ sei ein auf J erklärter Mittelwert. Ist dann für alle a, b aus J mit $a < b$ stets

$$(2^*) \quad D_{\varphi}(a, m(a,b), b) = \begin{vmatrix} u(a) & v(a) & \varphi(a) \\ u(m(a,b)) & v(m(a,b)) & \varphi(m(a,b)) \\ u(b) & v(b) & \varphi(b) \end{vmatrix} \leq 0,$$

so heiße $\varphi(x)$ "m-extremalkonvex" (m-ek.).

§ 3 : Bemerkungen zu den Definitionen

1. Wie jede Funktion, die der Bedingung (1) genügt, auch der Bedingung (1*) genügt, so ist jede ek. Funktion (Def.1) auch m-ek. (Def.1*); das Umgekehrte braucht jedoch nicht zu gelten. Einzelheiten hierüber bringen die Sätze 16* und 21*.

2. Es ist gleichgültig, welches Lösungspaar u, v mit den genannten Eigenschaften zur Definition von ek. durch (2) bzw. von m-ek. durch (2*) herangezogen wird. Genauer: Sind u, v und $\bar{u}, \bar{v}$ zwei Lösungspaare von $L \langle y \rangle = 0$, mit

$$W = \begin{vmatrix} u & v \\ u' & v' \end{vmatrix} > 0, \quad \bar{W} = \begin{vmatrix} \bar{u} & \bar{v} \\ \bar{u}' & \bar{v}' \end{vmatrix} > 0,$$

so ist

$$D_{\varphi}(x_1, x_2, x_3) \leq 0$$

dann und nur dann, wenn auch

$$\bar{D}_{\varphi}(x_1, x_2, x_3) \leq 0,$$

wo $\bar{D}_{\varphi}$ das mit $\bar{u}, \bar{v}$ anstelle von u, v gebildete D_{φ} ist.

$\bar{u}, \bar{v}$ lassen sich nämlich durch u, v mittels von Konstanten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ so darstellen:

$$\bar{u} = \alpha u + \beta v, \quad \bar{v} = \gamma u + \delta v.$$

Daher ist

$$\bar{W} = T \cdot W$$

mit

$$T = \alpha\delta - \beta\gamma > 0;$$

ferner ist

$$\bar{D}_{\varphi} = T \cdot D_{\varphi},$$

woraus die Behauptung folgt.

Wenn also der Begriff "ek." bzw. "m-ek." auch nicht von der speziellen Wahl eines Lsungspaares u, v mit $W(x) > 0$ abhängig

ist, so ist er doch abhängig von $L \langle y \rangle$ selbst. (Ein einfaches Beispiel in Abschnitt VI, § 1.) In Fällen, wo es darauf ankommt, muß man also die Bezeichnungen ek. und m-ek. durch den Zusatz "bzgl. L " ergänzen und das gemeinte $L \langle y \rangle$ angeben.

3. Alle Lösungen von $L \langle y \rangle = 0$ sind ek. (und damit auch m-ek.). Denn dann gilt wieder

$$y = \alpha u + \beta v \quad (\alpha, \beta \text{ Konstanten});$$

aus (2) wird

$$D_y = 0.$$

Die Lösungen von $L \langle y \rangle = 0$ sind also ausgezeichnete ek. Funktionen; sie übernehmen die Rolle der linearen Funktionen in der Theorie der gewöhnlichen konvexen Funktionen.

4. Die mit der Def.1 gegebene Verallgemeinerung des Begriffes einer konvexen Funktion geht zurück auf W. Blaschke und G. Pick ⁶⁾. Blaschke und Pick fassen aber insofern nur etwas speziellere Funktionen $\varphi(x)$ ins Auge, als sie nicht nur die Stetigkeit, sondern sogar die stetige Differenzierbarkeit von $p(x)$ verlangen. Während wir für die Existenz von $L \langle y \rangle$ nur zu verlangen brauchen, daß y' und $(p \cdot y')$ existieren, fordern Blaschke und Pick, daß y zweimal differenzierbar sei. Jedenfalls folgt aus der Existenz von $L \langle y \rangle$ die Stetigkeit von $(p \cdot y')$ und daraus, da $p > 0$, die Stetigkeit von y' . Insbesondere dürfen wir also die in Def.1 auftretenden Funktionen u', v', W als stetig in J voraussetzen.

5. Nicht nur der Begriff, sondern auch die Bezeichnung "extremalkonvex" stammt von Blaschke und Pick. Sie hängt vermutlich damit zusammen, daß diejenigen ek. Funktionen, die Lösung von $L \langle y \rangle = 0$ sind, aufgefaßt werden können als Extremalen des Variationsproblems, zu gegebenen Randbedingungen

$$y(a) > 0, \quad y(b) > 0 \quad (a, b \text{ aus } J)$$

das y zu finden, welches

$$(4) \quad \int_a^b (p \cdot y'^2 - q \cdot y^2) dx = [p \cdot y \cdot y']_a^b - \int_a^b y \cdot L \langle y \rangle dx$$

zu einem Minimum macht.

Denn setzt man

$$f(x, y, y') = p \cdot y'^2 - q \cdot y^2,$$

so sind die Extremalen des genannten Variationsproblems die Lösungen der Eulerschen Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

und diese lautet hier offenbar

$$L\langle y \rangle = 0.$$

Überdies bemerken wir, daß die Lösungen von $L\langle y \rangle = 0$ das Integral (4) auch wirklich zu einem Minimum machen, wenn das Variationsproblem ein schwaches ist. Das Weierstraßsche Kriterium dafür ist nämlich

$$1. \quad f''_{yy} > 0.$$

2. Die Jacobische Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx} (f''_{yy} \cdot u) + \left(\frac{d}{dx} f''_{yy} - f''_{yy} \right) \cdot u = 0$$

hat eine im Integrationsintervall von Null verschiedene Lösung.

Beides ist hier der Fall, denn

$$1. \quad \text{ist hier } f''_{yy} = 2 \cdot p > 0,$$

2. lautet die genannte Differentialgleichung hier $L\langle u \rangle = 0$, und eine auf J stets positive Lösung derselben wird in Def.1 ausdrücklich gefordert.

6. Für manche Zwecke ist es günstiger, $L\langle y \rangle$ statt in der Gestalt, die in Def.1 angegeben ist, in der folgenden zu schreiben:

$$(5) \quad L\langle y \rangle = \frac{1}{W(u)} \begin{vmatrix} u & v & y \\ u' & v' & y' \\ (p \cdot u) & (p \cdot v) & (p \cdot y) \end{vmatrix}$$

Das ist möglich, wie aus

$$L\langle u \rangle \equiv (p \cdot u)' + q \cdot u = 0, \quad L\langle v \rangle = (p \cdot v)' + q \cdot v = 0$$

in einfacher Rechnung folgt.

II. Lösungen von $L\langle y \rangle = 0$.

Wir legen hier die Bezeichnungen und Voraussetzungen der Def.1 zu Grunde und bemerken, daß über das Vorzeichen der Lösungen u, v von $L\langle y \rangle = C$ nichts vorausgesetzt ist. Darüber ist auch nichts beweisbar. Man kann aber aus u, v Lösungen bilden, über deren Vorzeichen Klarheit besteht.

§ 1 : Einführung spezieller Lösungen von $L\langle y \rangle = 0$.

Def.2 : Es sei

$$g(x_0, x) = \begin{vmatrix} u(x_0) & v(x_0) \\ u(x) & v(x) \end{vmatrix}.$$

Diese $g(x_0, x)$ werden im folgenden dauernd auftreten; sie entsprechen den Linearfaktoren $(x - x_0)$ bei den gewöhnlichen konvexen Funktionen. Sie sind (vgl. I, § 3, 3) ek. bezüglich x und x_0 . Es ist $g(x_0, x) = -g(x, x_0)$. Stets soll kurz geschrieben werden

$$\frac{d}{dx} g(x_0, x) = g'(x_0, x).$$

Mit Überlegungen, die denen in (I, § 3, 2) ganz entsprechen, läßt sich zeigen: Geht man von einem Lösungspaar u, v mit $W > 0$ zu einem anderen Lösungspaar $\bar{u}, \bar{v}$ mit $\bar{W} > 0$ über, so unterscheidet sich das mit u, v gebildete $g(x_0, x)$ von dem mit $\bar{u}, \bar{v}$ gebildeten $\bar{g}(x_0, x)$ nur um einen positiven, von x_0 und x unabhängigen Faktor:

$$g(x_0, x) = \gamma \cdot \bar{g}(x_0, x) \quad , \quad \text{wo } \gamma = \text{const} > 0.$$

§ 2 : Eigenschaften der $g(x_0, x)$.

Wie schon angedeutet, läßt sich ein Vorzeichensatz über die $g(x_0, x)$ beweisen, nämlich

Satz 1 :

$$\begin{array}{lll} g(x_0, x) > 0 & \text{wenn} & x_0 < x, \\ g(x_0, x) = 0 & \text{wenn} & x_0 = x, \\ g(x_0, x) < 0 & \text{wenn} & x_0 > x. \end{array}$$

Bew.: Die zweite Aussage ist trivial, und da

$$g'(x_0, x_0) = W(x_0) > 0,$$

genügt der Nachweis, daß $g(x_0, x)$ in J keine weiteren Nullstellen außer $x = x_0$ hat. Wäre nun auch $g(x_0, x_1) = 0$ (x_1 aus J , $x_0 \neq x_1$), so hätte nach einem bekannten Satz aus der Theorie der linearen Differentialgleichungen jede von $g(x_0, x)$ linear unabhängige Lösung von $L\langle y \rangle = 0$ zwischen x_0 und x_1 eine Nullstelle. Dies ist aber ein Widerspruch zu der in Def.1 enthaltenen Forderung nach der Existenz einer auf J positiven Lösung w .

Im folgenden haben wir öfter die durch zwei Punkte

$$P_0(x_0, y_0), \quad P_1(x_1, y_1)$$

mit x_0, x_1 aus J , $x_0 \neq x_1$; y_0, y_1 beliebig, aber $(y_0, y_1) \neq (0, 0)$

gehende Lösung von $L\langle y \rangle = 0$ zu benutzen. Es kann nicht zwei verschiedene derartige Lösungen geben, da deren Differenz sonst eine nicht-triviale, an zwei verschiedenen Stellen x_0, x_1 verschwindende Lösung wäre, was man entsprechend dem obigen Beweis zum Widerspruch führt. - Daß es aber überhaupt eine Lösung durch P_0, P_1 gibt, ist auf Grund des letzten Satzes klar ($g(x_0, x_1) \neq 0$); sie lautet offenbar

$$(1) \quad y(x) = y_0 \frac{g(x_1, x)}{g(x_1, x_0)} + y_1 \frac{g(x_0, x)}{g(x_0, x_1)}.$$

In dieser Darstellung kommen zum ersten Mal Quotienten der g vor; das wird im folgenden oft der Fall sein, und wir benötigen

Satz 2: Es sei $J_a: \langle \alpha, \beta \rangle$ ein (echtes oder auch unechtes) Teilintervall von J , und x_0, x_1 seien aus J_a . Dann gibt es eine positive Zahl M , daß für alle x aus J_a mit $|x - x_0| < \rho \cdot |x_1 - x_0|$ und $\rho > 0$ gilt

$$\left| \frac{g(x_0, x)}{g(x_0, x_1)} \right| < \rho \cdot M.$$

Bew.: Die Funktion

$$F(\xi, \eta) = \begin{cases} \frac{g(\xi, \eta)}{\eta - \xi} & , \quad \xi \neq \eta \\ W(\xi) & , \quad \xi = \eta \end{cases}$$

ist nach Def.2 und Satz 1 auf dem abgeschlossenen Quadrat

$$\alpha \leq \xi \leq \beta, \quad \alpha \leq \eta \leq \beta$$

stetig und positiv; es gibt positive Zahlen m und M' , daß dort

$$m \leq F(\xi, \eta) \leq M'.$$

Es folgt die Behauptung:

$$\left| \frac{g(x_0, x)}{g(x_0, x_1)} \right| = \frac{F(x_0, x)}{F(x_0, x_1)} \frac{|x - x_0|}{|x_1 - x_0|} \leq \vartheta \cdot \frac{M'}{m} = \vartheta M.$$

Folgende Identitäten werden später viel Rechenarbeit ersparen:

Satz 3: Stets gilt

$$(a) \quad \left| \frac{g(x_0, x)}{g(x_0, t)} \cdot \frac{g(x_1, x)}{g(x_1, t)} \right| = g(x, t) \cdot g(x_0, x_1),$$

$$(b) \quad \left| \frac{g(x_0, x)}{g'(x_0, x)} \cdot \frac{g(x_1, x)}{g'(x_1, x)} \right| = W(x) \cdot g(x_0, x_1),$$

$$(c) \quad g(x_1, x) \cdot D_{\varphi}(x_1, x_2, x_3) = g(x_1, x_2) \cdot D_{\varphi}(x_2, x, x_3) - g(x_1, x_3) \cdot D_{\varphi}(x_1, x, x_2),$$

und, falls $\varphi(x)$ in x_2 differenzierbar ist und man

$$\frac{\partial}{\partial x} D_{\varphi}(x_1, x, x_2) = \Theta_{\varphi}(x_1, x, x_2)$$

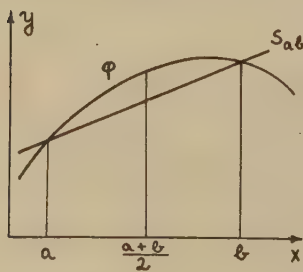
setzt, auch

$$(d) \quad W(x_2) \cdot D_{\varphi}(x_1, x_2, x_3) = g(x_1, x_2) \cdot \Theta_{\varphi}(x_2, x_2, x_3) - g(x_1, x_3) \cdot \Theta_{\varphi}(x_1, x_2, x_2).$$

Bew.: Die Ausdrücke auf beiden Seiten von (a) stellen bezüglich x je eine Lösung von $L \langle y \rangle = 0$ dar. Diese beiden Funktionen haben für $x = x_0$ und $x = x_1$ denselben Wert, so daß sie (vgl. Herleitung von (1)) für alle x aus J übereinstimmen. Aus der damit bewiesenen Beziehung (a) folgt (b), indem man nach t differenziert und $t = x$ setzt. Ebenso ergeben sich (c) und (d).

§ 3: Anschauliche Deutung der Definitionen 1 und 1*.

Die anschauliche Bedeutung der in (I, § 1) gegebenen Bedingung (I, 1) für konvexe Funktionen besteht darin, daß eine nach (I, 1) konvexe Funktion $\varphi(x)$ in jedem Teilintervall $\langle a, b \rangle$ von J nicht unterhalb der durch $(a, \varphi(a)), (b, \varphi(b))$ gehenden Lösung von $L \langle y \rangle \equiv y'' = 0$ verläuft, d.h. nicht unter der Sekante s_{ab} . Demgegenüber ist für eine nach (I, 1*) konvexe Funktion $\varphi(x)$ nur gefordert, daß für jedes Teilintervall $\langle a, b \rangle$ von J



$$\varphi\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq s_{ab}\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

In beiden Fällen ist aber $\varphi(x) \equiv s_{ab}(x)$ in $\langle a, b \rangle$ dann und nur dann, wenn $L\langle\varphi(x)\rangle \equiv 0$ in $\langle a, b \rangle$.

Entsprechendes gilt auch im Falle ek. bzw. m-ek. Funktionen. Zur Herleitung dessen entwickeln wir die Determinante $D_\varphi(a, x, b)$ für $a \neq b$ (vgl. Def. 1) unter Benutzung der $g(x_0, x)$. Nach Division durch die (nach Satz 1) von Null verschiedene Zahl $g(a, b)$ erhält man

$$(2) \quad \frac{D_\varphi(a, x, b)}{g(a, b)} = \varphi(a) \frac{g(b, x)}{g(b, a)} + \varphi(b) \frac{g(a, x)}{g(a, b)} - \varphi(x).$$

Vergleicht man (1), so ergibt sich, daß hierin

$$(3) \quad s_{ab}(x) = \varphi(a) \frac{g(b, x)}{g(b, a)} + \varphi(b) \frac{g(a, x)}{g(a, b)}$$

die Lösung von $L\langle y \rangle = 0$ durch $(a, \varphi(a)), (b, \varphi(b))$ ist.

Zunächst sei $\varphi(x)$ ek.; dann folgt aus (2), (3) nach Def. 1

$$s_{ab}(x) - \varphi(x) \leq 0 \quad \text{für alle } x \text{ aus } \langle a, b \rangle,$$

ferner nach Vertauschung der Zeilen in (I, 2)

$$s_{ab}(x) - \varphi(x) \geq 0 \quad \text{für alle } x \text{ aus } J, \text{ die nicht aus } \langle a, b \rangle.$$

Man beachte, daß diese beiden Ungleichungen gelten, unabhängig davon, ob $a < b$ oder $a > b$. Ferner sieht man leicht ein, daß umgekehrt aus der Gültigkeit der letzten beiden Ungleichungen folgt, daß $\varphi(x)$ ek. ist.

Ist $\varphi(x) \equiv s_{ab}(x)$, so ist $L\langle\varphi(x)\rangle \equiv 0$, da ja $s_{ab}(x)$ Lösung ist von $L\langle y \rangle = 0$; und umgekehrt: Ist $L\langle\varphi(x)\rangle \equiv 0$, so ist (vgl. I, § 3, 3) $D_\varphi(a, x, b) \equiv 0$, so daß nach (2) gilt $\varphi(x) \equiv s_{ab}(x)$. Man hat

Satz 4: Die reelle Funktion $\varphi(x)$ sei erklärt auf dem (offenen oder abgeschlossenen) Intervall J der Abszissenachse. Für jedes Teilintervall $\langle a, b \rangle$ denke man sich die durch die Punkte $(a, \varphi(a))$, $(b, \varphi(b))$ gehende Lösung $s_{ab}(x)$ (Gl. 3) von $L\langle y \rangle = 0$ gebildet. Unter diesen Voraussetzungen ist $\varphi(x)$ dann und nur dann ek., wenn für jedes Paar a, b

$$\varphi(x) \begin{cases} \geq s_{ab}(x) & \text{für } x \text{ aus } \langle a, b \rangle \\ \leq s_{ab}(x) & \text{für } x \text{ aus } J, \text{ aber nicht aus } \langle a, b \rangle \end{cases} \quad \text{und}$$

Überdies ist $\varphi(x) \equiv s_{ab}(x)$ dann und nur dann, wenn $L\langle\varphi(x)\rangle \equiv 0$.

Bevor wir den entsprechenden Satz für m-ek. Funktionen formulieren, soll noch eine für später wichtige Folgerung gezogen werden. - Setzt man die auf J ek. Funktion $\varphi(x)$ als nicht negativ auf dem (echten oder unechten) Teilintervall $\langle a, b \rangle$ von J vor-

aus, dann ist auch $s_{ab}(x) \geq 0$ für x aus $\langle a, b \rangle$. Dies folgt aus (3) nach Satz 1. Nach Satz 4 ist dort

$$h(x) = \varphi(x) - s_{ab}(x) \geq 0;$$

ferner ist $h(a) = h(b) = 0$. Da außerdem $D_h = D\varphi - Ds_{ab} = D\varphi$, ist mit $\varphi(x)$ auch $h(x)$ ek.. Damit ist der folgende, für konvexe Funktionen unmittelbar klare Satz gewonnen.

Satz 4a: Eine nicht negative, auf dem abgeschlossenen Intervall $\langle a, b \rangle$ ek. Funktion $\varphi(x)$ läßt sich dort darstellen als Summe von zwei nicht negativen, ek. Funktionen:

$$\varphi(x) = h(x) + s_{ab}(x).$$

Es verschwindet $h(x)$ für $x = a$ und $x = b$; $s_{ab}(x)$ ist Lösung von $L\langle y \rangle = 0$.

Wir formulieren nun den zu Satz 4 analogen Satz für m -ek. Funktionen, der sich auf Grund von Def.1* aus (2) und (3) wie Satz 4 ergibt:

Satz 4*: Die reelle Funktion $\varphi(x)$ sei erklärt auf dem (offenen oder abgeschlossenen) Intervall J der Abszissenachse; $m(a, b)$ sei ein auf J erklärter Mittelwert (Def. Seite 4). Für jedes Teilintervall $\langle a, b \rangle$ von J denke man sich die durch die Punkte $(a, \varphi(a))$, $(b, \varphi(b))$ gehende Lösung $s_{ab}(x)$ (Gl.3) von $L\langle y \rangle = 0$ gebildet. Unter diesen Voraussetzungen ist $\varphi(x)$ dann und nur dann m -ek., wenn für jedes Paar a, b

$$\varphi(m(a, b)) \geq s_{ab}(m(a, b)).$$

Überdies ist $\varphi(x) \equiv s_{ab}(x)$ dann und nur dann, wenn $L\langle \varphi \rangle \equiv 0$.

Bei ek. Funktionen weiß man auf Grund von Satz 4 im ganzen Intervall J über das Vorzeichen von $\varphi(x) - s_{ab}(x)$ Bescheid. Darüber gibt Satz 4* für m -ek. Funktionen nur an der Stelle $x = m(a, b)$ Auskunft; außerdem ist nur noch bekannt, daß $\varphi(x) - s_{ab}(x) = 0$ für $x = a$, $x = b$.

Im nächsten Abschnitt sollen zunächst Aussagen über das Vorzeichen von $\varphi(x) - s_{ab}(x)$ auch für andere Stellen x von J hergeleitet werden. Diese Aussagen werden später wichtiges Hilfsmittel zur Untersuchung der m -ek. Funktionen sein.

III. Allgemeine Eigenschaften

der m-ek. Funktionen.

Mehrere Untersuchungen dieses Abschnitts beziehen sich nur auf die Eigenschaften m-ek. Funktionen an den inneren Punkten ihres Definitionsintervalls J . Was das besondere Verhalten an eventuellen Randpunkten von J anbetrifft, so verweisen wir auf den Abschnitt IV, der Aussagen darüber für ek. Funktionen enthält, die auch (I, § 3, 1) für m-ek. Funktionen gelten.

§ 1 : Abbildung des Intervalls J durch $A(x)$.

Die Funktion $A(x)$ (Def. Seite 4) vermittelt eine umkehrbar stetige und eindeutige Abbildung von J auf ein Intervall J' . Ist nun $y(x)$ irgend eine auf J erklärte Funktion, so kann man mit $A(x) = x'$ definieren:

$$Y(x') = y(x) \quad ;$$

damit hat man aus $y(x)$ eine auf J' erklärte Funktion $Y(x')$ gewonnen. Natürlich ist auch das Umgekehrte möglich. Wir wollen $Y(x')$ "Transformierte von $y(x)$ " nennen. Die gewählten Bezeichnungen (die Transformierte einer Funktion durch den entsprechenden Großbuchstaben, das Bild eines Punktes aus J in J' durch denselben Buchstaben, jedoch mit einem Strich) werden im folgenden ohne weiteren Hinweis gebraucht. - Ganz einfache Feststellungen enthält

Hilfssatz 1*: Ist eine auf J erklärte Funktion auf einem Teilintervall von J stetig (gleichmäßig stetig, monoton, nach oben oder nach unten beschränkt), so ist es auch die Transformierte auf dem durch $A(x)$ vermittelten Bild dieses Teilintervalls; und umgekehrt.

Ebenso leicht folgt aus Satz 4* der grundlegende

Satz 4*: $\varphi(x)$ sei auf J erklärt. Für jedes Teilintervall $\langle a, b \rangle$ wird nach (II, 3) die Lösung $s_{a,b}(x)$ von $L\langle y \rangle = 0$ gebildet, und

man betrachtet auf J' die Transformierten $\phi(x'), S_{\alpha\beta}(x')$. Unter diesen Voraussetzungen ist $\phi(x')$ dann und nur dann m -ek., wenn stets

$$S_{\alpha\beta}\left(\frac{\alpha'+\beta'}{2}\right) \leq \phi\left(\frac{\alpha'+\beta'}{2}\right).$$

Dieser Satz eröffnet die Möglichkeit, das Studium der m -ek. Funktionen an Hand derjenigen m -ek. Funktionen durchzuführen, für die

$$m(a,b) = \frac{a+b}{2}.$$

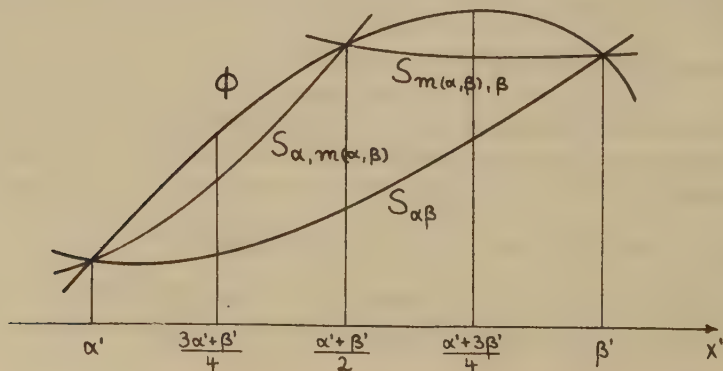
Dieser Weg soll auch im folgenden beschrritten werden.

Dem sei ein weiterer einfacher Hilfssatz vorausgeschickt. Man betrachtet die Differenz zweier verschiedener, durch einen Punkt (x_0, y_0) verlaufenden Lösungen von $L\langle y \rangle = 0$. Diese Differenz verschwindet für $x = x_0$ von erster Ordnung, also unter Vorzeichenwechsel; als Lösung von $L\langle y \rangle = 0$ jedoch an keiner anderen Stelle von J . Die Transformierte dieser Differenz verschwindet für $x' = x'_0$ deshalb ebenfalls unter Vorzeichenwechsel, und sie verschwindet an keiner anderen Stelle von J' . Daher gilt

Hilfssatz 2*: Die Differenz zweier verschiedener, durch den Punkt (x'_0, y'_0) verlaufenden transformierten Lösungen von $L\langle y \rangle = 0$ ist für $x' > x'_0$ und für $x' < x'_0$ je vorzeichendefinit und hat in den genannten Intervallen entgegengesetztes Vorzeichen.

§ 2 : Bildung von Untermengen von J und ihre ersten Anwendungen.

Es sei $\phi(x')$ m -ek., wir fassen irgend zwei Punkte α', β' von J' ins Auge. Nach Satz 4* liegt $\phi(x')$ in $\frac{\alpha'+\beta'}{2}$ oberhalb von $S_{\alpha\beta}(x')$. Nach Hilfssatz 2* liegt daher $S_{\alpha, m(\alpha, \beta)}$ für $x' > \alpha'$ oberhalb von $S_{\alpha\beta}$. Da nun $\phi(x')$ nach Satz 4* in $\frac{3\alpha'+\beta'}{4}$ über $S_{\alpha, m(\alpha, \beta)}$ liegt,



folgt: $\phi(x')$ liegt in $\frac{3\alpha' + \beta'}{4}$ oberhalb von $S_{\alpha\beta}(x')$. Dasselbe läßt sich für $\frac{\alpha' + 3\beta'}{4}$ zeigen, ferner für alle Achtelpunkte von $\langle \alpha', \beta' \rangle$, und so fort; der Induktionsschluß ist trivial. Um dieses Ergebnis jedoch geeignet formulieren zu können, braucht man

Def. 3*: Die Menge aller durch $\langle \alpha, \beta \rangle$ bestimmten Punkte ξ' von J' , die sich in der Gestalt

$$\xi' = \alpha' + (\beta' - \alpha') \sum_{v=n}^N \varepsilon_v \cdot 2^v$$

($\varepsilon_v = 0$ oder $= 1$; n, N ganze Zahlen, event. neg.; $n \leq N$)

darstellen lassen, werde mit $\mathcal{M}_{\alpha\beta}$ bezeichnet; die Menge aller Punkte ξ von J , für die $A(\xi)$ gleich einem der in obiger Weise darstellbaren ξ' ist, heiße $\mathcal{M}_{\alpha\beta}$.

Aus der Definition des allgem. Mittelwertes (Seite 4) folgt, daß z.B. die folgenden Punkte aus $\mathcal{M}_{\alpha\beta}$ sind:

$$\alpha, \beta; m(\alpha, \beta); m(\alpha, m(\alpha, \beta)), m(m(\alpha, \beta), \beta).$$

Ferner ist klar, daß auch Punkte außerhalb von $\langle \alpha, \beta \rangle$ zu $\mathcal{M}_{\alpha\beta}$ gehören, wenn α oder β (oder α und β) innere Punkte von J sind. Daß $\mathcal{M}_{\alpha\beta}$ und $\mathcal{M}'_{\alpha\beta}$ auf J bzw. J' dicht sind, folgt aus Hilfssatz 1*. - Indem wir nun den oben gefundenen Sachverhalt auf J statt auf J' beziehen und die Bezeichnungen von Def. 3* benutzen, können wir in Erweiterung von Satz 4* sagen:

Satz 4* A: Ist ξ aus $\mathcal{M}_{\alpha\beta}$ und aus $\langle \alpha, \beta \rangle$, so gilt für die m-ek. Funktion $\varphi(x)$ die Ungleichung

$$\varphi(\xi) \geq S_{\alpha\beta}(\xi).$$

Eine zweite Erweiterung von Satz 4* bringt Satz 4* B. Zu dessen Beweis benötigen wir noch eine Aussage über die Beziehungen zweier $\mathcal{M}_{\alpha\beta}$ zueinander. Ein Beispiel verdeutliche, worum es geht.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & & 1/4 & & 1/2 & & 3/4 & & 1 \\ \hline = \alpha'_1 = \alpha'_2 & & & & & & = \beta'_2 & & = \beta'_1 \end{array}$$

Das Intervall $\langle 0, 1 \rangle$ sei Teilintervall von J' . Wählt man $\alpha'_1 = 0$, $\beta'_1 = 1$, so sind die Punkte $\xi' = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ offenbar in $\mathcal{M}'_{\alpha'_1\beta'_1}$ enthalten. Wählt man sodann $\alpha'_2 = 0$, $\beta'_2 = \frac{3}{4}$ (beide aus $\mathcal{M}'_{\alpha'_1\beta'_1}$), so gehört jeder Punkt von $\mathcal{M}'_{\alpha'_2\beta'_2}$ auch zu $\mathcal{M}'_{\alpha'_1\beta'_1}$, wie man sich leicht klar macht. Aber es gibt Punkte aus $\mathcal{M}'_{\alpha'_1\beta'_1}$, die nicht Element von $\mathcal{M}'_{\alpha'_2\beta'_2}$ sind, z.B. $\xi' = \frac{1}{4}$ und $\xi' = \frac{1}{2}$. Letzteres wäre nicht vorgekommen, wenn $\alpha'_2 = 0$, $\beta'_2 = \frac{1}{2}$ gewählt worden wäre. Dies lehrt der folgende

Satz 5*: Sind α_2, β_2 aus $\mathcal{M}_{\alpha_1, \beta_1}$, so ist $\mathcal{M}_{\alpha_2, \beta_2}$ Untermenge von $\mathcal{M}_{\alpha_1, \beta_1}$. Es ist $\mathcal{M}_{\alpha_1, \beta_1} = \mathcal{M}_{\alpha_2, \beta_2}$ dann und nur dann, wenn für ganzzahliges μ

$$(1) \quad \frac{\beta_2 - \alpha_2}{\beta_1 - \alpha_1} = 2^\mu.$$

Bew.: Man geht zu den $\mathcal{M}'$ über; dann lautet die Voraussetzung zum ersten Teil des Satzes (endliche Summen der Art $\sum \varepsilon_v 2^v$ durch D mit Index bezeichnet):

$$(2) \quad \alpha'_2 = \alpha'_1 + (\beta'_1 - \alpha'_1) D_{\alpha'_2}; \quad \beta'_2 = \alpha'_1 + (\beta'_1 - \alpha'_1) D_{\beta'_2}.$$

Es ist zu zeigen, daß sich jedes

$$(3) \quad \xi' = \alpha'_2 + (\beta'_2 - \alpha'_2) D_{\xi'}^{(2)}$$

in der Gestalt

$$(4) \quad \xi' = \alpha'_1 + (\beta'_1 - \alpha'_1) D_{\xi'}^{(1)}$$

darstellen läßt. Das ist aber nach (2) unmittelbar klar.

Daß bei Gültigkeit von (1) Beziehungen der Art (3) und (4) einander bedingen, ist ebenfalls unmittelbar einleuchtend. Ist andererseits $\mathcal{M}'_{\alpha'_1, \beta'_1} = \mathcal{M}'_{\alpha'_2, \beta'_2}$, so gilt neben (2) noch

$$\alpha'_1 = \alpha'_2 + (\beta'_2 - \alpha'_2) D_{\alpha'_1}; \quad \beta'_1 = \alpha'_2 + (\beta'_2 - \alpha'_2) D_{\beta'_1},$$

woraus mit (2) folgt

$$\begin{aligned} \frac{\beta'_2 - \alpha'_2}{\beta'_1 - \alpha'_1} &= D_{\beta'_2} - D_{\alpha'_2} = \frac{1}{D_{\beta'_1} - D_{\alpha'_1}} \\ &= D_2 = \frac{1}{D_1}. \end{aligned}$$

oder

Der rechte Teil dieser Doppelgleichung erfordert aber, daß es ein ganzzahliges μ gibt, derart, daß

$$D_2 = \frac{1}{D_1} = 2^\mu.$$

Damit ist der Satz bewiesen. Es folgt der bereits angekündigte

Satz 4*B: Ist ξ aus $\mathcal{M}_{\alpha, \beta}$, aber nicht aus $\langle \alpha, \beta \rangle$, so gilt für m-ek. $\varphi(x)$ die Ungleichung

$$\varphi(\xi) \leq S_{\alpha, \beta}(\xi).$$

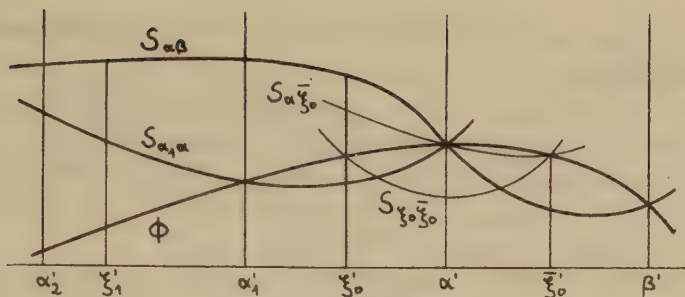
Bew.: Wir gehen zu den Transformaten über, nehmen $\alpha' < \beta'$ an und geben ein ξ'_0 aus $\mathcal{M}'_{\alpha, \beta}$ und aus $\langle \alpha' - (\beta' - \alpha'), \alpha' \rangle$ vor. Ist etwa dann

$$\xi'_0 = \alpha' - (\beta' - \alpha') \sum \varepsilon_v 2^v,$$

so liegt

$$\bar{\xi}'_0 = \alpha' + (\beta' - \alpha') \sum \varepsilon_v 2^v$$

in $\langle \alpha', \beta' \rangle$ und ist aus $\mathcal{M}'_{\alpha, \beta}$. Wendet man Satz 4*A und Hilfsatz 2* an, so folgt, daß $S_{\alpha, \beta} \bar{\xi}'_0$ in ξ'_0 unter $S_{\alpha, \beta}$ liegt. Läge $S_{\alpha, \beta} \bar{\xi}'_0$



in ξ_0' unter ϕ , so läge es für $x' < \xi_0'$ unter $S_{\xi_0 \xi_0}$ und könnte nach Satz 4*A in α' nicht mit ϕ übereinstimmen. Da also für ξ_0'

$$\phi \leq S_{\alpha \xi_0'} \leq S_{\alpha \beta},$$

ist der Satz für alle ξ_0' aus $\mathcal{M}'_{\alpha \beta}$ und aus $\langle \alpha' - (\beta' - \alpha'), \alpha' \rangle$ bewiesen.

Wir setzen

$$\alpha' - (\beta' - \alpha') = \alpha_1', \quad \alpha' - 2(\beta' - \alpha') = \alpha_2'$$

und können ebenso beweisen, daß für alle ξ_1' aus $\mathcal{M}'_{\alpha_1 \alpha}$ und aus $\langle \alpha_2', \alpha_1' \rangle$ gilt

$$(5) \quad \phi \leq S_{\alpha_1 \alpha}.$$

Da aber nach Satz 5* offenbar $\mathcal{M}_{\alpha_1 \alpha} = \mathcal{M}_{\alpha \beta}$, gilt dies auch für die zu $\mathcal{M}'_{\alpha \beta}$ und zu $\langle \alpha_2', \alpha_1' \rangle$ gehörigen ξ_1' . Aus dem schon bewiesenen Teil des Satzes folgt nun speziell

$$(6) \quad S_{\alpha_1 \alpha}(\alpha_1') = \phi(\alpha_1') \leq S_{\alpha \beta}(\alpha_1').$$

Mit Hilfssatz 2* folgt dann aus (5) und (6) die Behauptung auch für die zu $\mathcal{M}'_{\alpha \beta}$ gehörigen Punkte von $\langle \alpha_2', \alpha_1' \rangle$. So fährt man fort und kann auch für die rechts von β' gelegenen Punkte von $\mathcal{M}_{\alpha \beta}$ ähnlich argumentieren. Damit ist Satz 4*B bewiesen.

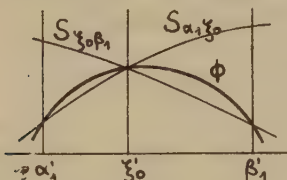
Die Sätze 4*A und 4*B geben für ganz $\mathcal{M}_{\alpha \beta}$ Auskunft über das Vorzeichen von $\phi - S_{\alpha \beta}$. Darüberhinaus erhebt sich aber die Frage nach dem Vorzeichen von $\phi - S_{\alpha \beta}$ auf $\mathcal{M}_{\alpha \beta}$, wenn $(a, b) \neq (\alpha, \beta)$. Unter Beschränkung von a, b auf Punkte aus $\mathcal{M}_{\alpha \beta}$ werden wir diese Frage in den Sätzen 4*C, 4*D beantworten, deren Aussage der des Satzes 4 entspricht, wenn man dort a, b und x auf $\mathcal{M}_{\alpha \beta}$ beschränkt.

§ 3 : Stetigkeit und Beschränktheit m-ek. Funktionen.

Dieser letzten Erweiterung von Satz 4* muß noch der folgende Satz vorausgeschickt werden.

Satz 6*: Die m-ek. Funktion $\varphi(x)$ ist auf den inneren Punkten von $\mathcal{M}_{\alpha\beta}$ stetig.

Bew.: Ist ein innerer Punkt ξ_0 von $\mathcal{M}_{\alpha\beta}$ vorgelegt, so ist nach Übergang zu J' klar, daß es Punkte α'_1, β'_1 aus $\mathcal{M}'_{\alpha\beta}$ mit $\alpha'_1 < \xi'_0 < \beta'_1$ gibt, für die nach Satz 5* gilt: $\mathcal{M}'_{\alpha'_1\xi'_0} = \mathcal{M}'_{\xi'_0\beta'_1} = \mathcal{M}'_{\alpha\beta}$. Nach



den Sätzen 4*A und 4*B hat man für ξ' aus $\mathcal{M}_{\alpha\beta}$

bei $\xi' < \xi'_0$: $S_{\alpha'_1\xi'_0}(\xi') \leq \phi(\xi') \leq S_{\xi'_0\beta'_1}(\xi')$,

bei $\xi' > \xi'_0$: $S_{\xi'_0\beta'_1}(\xi') \leq \phi(\xi') \leq S_{\alpha'_1\xi'_0}(\xi')$.

Daraus folgt schon die Behauptung.

Satz 4*C: Gegeben sei $\mathcal{M}_{\alpha\beta}$, und a, b sowie ξ seien aus $\mathcal{M}_{\alpha\beta}$. Dann gilt für die m-ek. Funktion $\varphi(x)$ und für die in (II,3) erklärte Funktion $s_{ab}(x)$:

$\varphi(\xi) - s_{ab}(\xi) \geq 0$ falls ξ zwischen a und b ,

$\varphi(\xi) - s_{ab}(\xi) \leq 0$ falls ξ nicht zwischen a und b .

Bew.: Auf Grund der Sätze 4*A und 4*B gelten die behaupteten Ungleichungen zunächst für $\xi = \xi^*$ aus $\mathcal{M}_{ab}$, d.h. nach Satz 5*: für eine auf $\mathcal{M}_{\alpha\beta}$ dichte Untermenge von $\mathcal{M}_{\alpha\beta}$. – Wir geben ein ξ aus $\mathcal{M}_{\alpha\beta}$, das zwischen a und b gelegen ist, und bilden eine gegen ξ konvergierende Punktfolge (ξ_v^*) (für $v = 1, 2, 3, \dots$) von Punkten aus $\mathcal{M}_{ab}$, die zwischen a und b gelegen sind. Für jedes dieser ξ_v^* gilt die erste der behaupteten Ungleichungen; jedes ξ_v^* ist auch Element von $\mathcal{M}_{\alpha\beta}$, auf welcher Punktmenge φ und s_{ab} stetig sind (Satz 6*). Daraus folgt die erste der behaupteten Ungleichungen; die zweite beweist man ganz analog.

Mit Überlegungen, die denen vor Satz 4 ganz entsprechen, folgt hieraus

Satz 4*D: $\varphi(x)$ ist dann und nur dann auf J m-ek., wenn für jede nach Def.3* aus J gebildete Untermenge $\mathcal{M}_{\alpha\beta}$ und für ξ_1, ξ_2, ξ_3 aus $\mathcal{M}_{\alpha\beta}$ (mit $\xi_1 < \xi_2 < \xi_3$) gilt

$$(7) \quad D_{\varphi}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \leq 0.$$

Dieser Satz ließe sich anstelle von Def.1* als Definition der m-ek. Funktionen benutzen.

Auf Grund von Satz 4*C ist ohne weiteres klar

Satz 7*: Ist $\mathcal{M}_{\alpha\beta}$ gegeben und sind a, b aus $\mathcal{M}_{\alpha\beta}$, so ist die m-ek. Funktion $\varphi(x)$ nach unten beschränkt auf den zwischen a und b gelegenen Punkten ξ von $\mathcal{M}_{\alpha\beta}$.

Das Gegenstück hierzu:

Satz 8*: Die m -ek. Funktion $\varphi(x)$ ist auf der Punktmenge $\mathcal{M}_{\alpha\beta}$ nach oben beschränkt.

Bew.: Infolge Satz 4* B ist $\varphi(\xi^*)$ für $\xi^* \geq m(\alpha, \beta)$ und ξ^* aus $\mathcal{M}_{\alpha, m(\alpha, \beta)}$ nach oben beschränkt. Dasselbe gilt für $\varphi(\xi^{**})$ mit $\xi^{**} \leq m(\alpha, \beta)$ und ξ^{**} aus $\mathcal{M}_{m(\alpha, \beta), \beta}$. Nach Satz 5* ist aber

$$\mathcal{M}_{\alpha\beta} = \mathcal{M}_{\alpha, m(\alpha, \beta)} = \mathcal{M}_{m(\alpha, \beta), \beta};$$

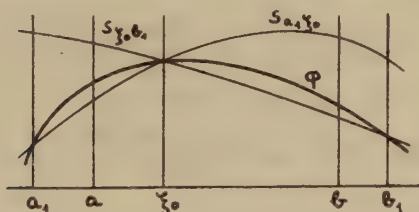
damit ist der Satz auch schon bewiesen.

Über Satz 6* hinausgehend gilt sogar noch

Satz 9*: Sind a, b innere Punkte von $\mathcal{M}_{\alpha\beta}$, so ist die m -ek. Funktion $\varphi(x)$ gleichmäßig stetig auf den zwischen a und b gelegenen Punkten von $\mathcal{M}_{\alpha\beta}$.

Bew.: Nach Voraussetzung gibt es zwei Punkte a_1, b_1 von $\mathcal{M}_{\alpha\beta}$, für die gilt $a_1 < a < b < b_1$. Ist nun ein ξ_0 aus $\langle a, b \rangle$ und aus $\mathcal{M}_{\alpha\beta}$ vorgegeben, so bilden wir $s_{a_1\xi_0}$ und $s_{\xi_0 b_1}$. Nach Satz 4* C ist

$$\begin{aligned} s_{a_1\xi_0}(\xi) \leq \varphi(\xi) \leq s_{\xi_0 b_1}(\xi) & \quad \text{für } \xi < \xi_0 \\ s_{a_1\xi_0}(\xi) \geq \varphi(\xi) \geq s_{\xi_0 b_1}(\xi) & \quad \text{für } \xi > \xi_0 \end{aligned} \quad \text{und } \xi \text{ aus } \mathcal{M}_{\alpha\beta}.$$



Daraus folgt

$$(8) \quad |\varphi(\xi) - \varphi(\xi_0)| \leq \max \{ |s_{a_1\xi_0}(\xi) - \varphi(\xi_0)|, |s_{\xi_0 b_1}(\xi) - \varphi(\xi_0)| \}$$

für ξ aus $\langle a, b \rangle$ und aus $\mathcal{M}_{\alpha\beta}$.

Hier ist etwa

$$s_{a_1\xi_0}(\xi) - \varphi(\xi_0) = \frac{1}{g(a_1, \xi_0)} \left[\varphi(\xi_0) (g(a_1, \xi) - g(a_1, \xi_0)) - \varphi(a_1) g(\xi_0, \xi) \right].$$

Nach den Sätzen 1, 7* und 8* folgt, daß es zu $\varepsilon > 0$ ein von ξ_0 unabhängiges δ_ε gibt, daß

$$|s_{a_1\xi_0}(\xi) - \varphi(\xi_0)| < \varepsilon$$

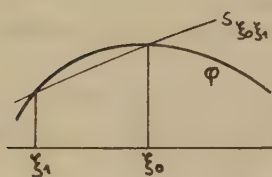
für $|\xi - \xi_0| < \delta_\varepsilon$ und ξ_0, ξ aus $\langle a, b \rangle$ sowie aus $\mathcal{M}_{\alpha\beta}$. Entsprechendes läßt sich für $s_{\xi_0 b_1}$ zeigen. Dann hat man nach (8) den behaupteten Satz.

Dieser Satz 9* ist übrigens keine triviale Folgerung aus Satz 6*. Der Satz, daß eine im abgeschlossenen Intervall stetige Funktion einer Veränderlichen daselbst gleichmäßig stetig ist, ist hier nicht anwendbar. Satz 6* gilt nämlich nicht für ein Intervall, sondern nur für eine Punktmenge, die in einem Intervall dicht liegt, ohne jedoch damit identisch zu sein. So ist zum Beispiel

$$y = 1/\xi - \sqrt{2}$$

für rationales ξ in $<1,2>$ stetig, aber nicht gleichmäßig stetig.

§ 4 : Zur Differenzierbarkeit m-ek. Funktionen.



Wir geben ein $\mathcal{M}_{\alpha\beta}$ vor und verabreden, daß im folgenden alle Abszissenwerte ξ Punkte von $\mathcal{M}_{\alpha\beta}$ sein sollen. Wir geben ξ_0, ξ_1 ($\xi_0 \neq \xi_1$) vor und betrachten nach (II,3) die Funktion $s_{\xi_0\xi_1}$, sowie deren Ableitung $s'_{\xi_0\xi_1}$ in ξ_0 , die hier mit $f(\xi_0, \xi_1)$ bezeichnet werde.

1.Beh.: Die für $\xi \neq \xi_0$ erklärte Funktion

$$(9) \quad f(\xi_0, \xi) = \frac{1}{g(\xi_0, \xi)} [W(\xi_0) \varphi(\xi) - g'(\xi, \xi_0) \varphi(\xi_0)]$$

ist als Funktion von ξ für $\xi < \xi_0$ und $\xi > \xi_0$ je monoton nicht zunehmend sowie für $\xi < \xi_0$ nie kleiner als für $\xi > \xi_0$.

Bew.: Mit $\xi_0 \neq \xi_1, \xi_0 \neq \xi_2$ findet man an Hand von Satz 3 (b)

$$(10) \quad f(\xi_0, \xi_2) - f(\xi_0, \xi_1) = \frac{W(\xi_0)}{g(\xi_0, \xi_1) g(\xi_0, \xi_2)} \cdot D_{\varphi}(\xi_0, \xi_1, \xi_2).$$

Dies muß in den Fällen

$\xi_0 < \xi_1 < \xi_2$, $\xi_1 < \xi_2 < \xi_0$, $\xi_1 < \xi_0 < \xi_2$
nicht positiv sein, was man mit Satz 4* D leicht nachweist.

2.Beh.: Falls ξ_0 innerer Punkt von $\mathcal{M}_{\alpha\beta}$ ist, dann gibt es

$$\lim_{\xi \rightarrow \xi_0 + 0} f(\xi_0, \xi), \quad \lim_{\xi \rightarrow \xi_0 - 0} f(\xi_0, \xi).$$

Bew.: Nach der 1.Beh. ist

$$(11) \quad f(\xi_0, \xi_1) \geq f(\xi_0, \xi_2) \quad \text{bei} \quad \xi_1 < \xi_0 < \xi_2.$$

Hieraus ergibt sich unter erneuter Anwendung der 1.Beh. mit einfachen Schlüssen auch die 2.Beh..

3.Beh.: Es ist

$$\lim_{\xi \rightarrow \xi_0 + 0} f(\xi_0, \xi) = \varphi'_+(\xi_0), \quad \lim_{\xi \rightarrow \xi_0 - 0} f(\xi_0, \xi) = \varphi'_-(\xi_0).$$

Bew.: Wir setzen $u(\xi_0) = u_0$, $u(\xi) = u$ usw. und bringen $f(\xi_0, \xi)$ in die folgende Gestalt:

$$f(\xi_0, \xi) = \frac{v_0' u_0 - u_0' v_0}{\begin{vmatrix} u_0 & v_0 \\ \xi - \xi_0 & \xi - \xi_0 \end{vmatrix}} \cdot \frac{\varphi - \varphi_0}{\xi - \xi_0} - \varphi_0 \cdot \frac{v_0' \frac{u - u_0}{\xi - \xi_0} - u_0' \frac{v - v_0}{\xi - \xi_0}}{\begin{vmatrix} u_0 & v_0 \\ \xi - \xi_0 & \xi - \xi_0 \end{vmatrix}}$$

Hieran liest man auf Grund des bereits Bewiesenen die 3. Beh. ab. Beachtet man noch (11), dann hat sich ergeben

Satz 10*: Jede m -ek. Funktion $\varphi(x)$ ist auf den inneren Punkten von $\mathcal{M}_{\alpha\beta}$ rechts- und linksseitig differenzierbar, und es ist

$$\varphi'_-(\xi) \geq \varphi'_+(\xi).$$

Anschaulich bedeutet diese letzte Ungleichung: Hat $\varphi(x)$ auf $\mathcal{M}_{\alpha\beta}$ überhaupt Ecken, so sind es "nach oben konvexe" Ecken.

Der Satz 10* legt eine Definition nahe, die im folgenden viel Rechenarbeit und viele Fallunterscheidungen ersparen wird.

Def. 4: Es sei $f(x)$ rechts- und linksseitig differenzierbar und $\vartheta(x)$ sei eine Funktion, die der einzigen Bedingung

$$0 \leq \vartheta(x) \leq 1$$

unterworfen sei. Dann soll

$$f'(x) = f'_+(x) + \vartheta(x) [f'_-(x) - f'_+(x)] = [1 - \vartheta(x)] f'_+(x) + \vartheta(x) f'_-(x)$$

"verallgemeinerte Ableitung von $f(x)$ " heißen.

Es ist klar, daß bei differenzierbaren Funktionen Ableitung und verallgemeinerte Ableitung (bei jeder Wahl von $\vartheta(x)$) übereinstimmen. Dieser Sachverhalt läßt es gerechtfertigt erscheinen, die in Satz 3 eingeführte Bezeichnung $\Theta_\varphi(x_1, x, x_2)$ für $\frac{\partial}{\partial x} D_\varphi(x_1, x, x_2)$ auch für die verallgemeinerte Ableitung von $D_\varphi(x_1, x, x_2)$ nach x zu benutzen. Rechte und linke Ableitung von $D_\varphi(x_1, x, x_2)$ nach x soll durch den Index + bzw. - am Θ_φ angedeutet werden.

Satz 11*: $\varphi(x)$ sei m -ek.; ξ_0 sei ein beliebiger, ξ ein innerer Punkt von $\mathcal{M}_{\alpha\beta}$. Dann gilt für die auf $\mathcal{M}_{\alpha\beta}$ genommene verallgemeinerte Ableitung Θ_φ die Ungleichung

$$\Theta_\varphi(\xi_0, \xi, \xi) \geq 0.$$

Bew.: Man wähle h jedenfalls so, daß $\xi+h$ zu $\mathcal{M}_{\alpha\beta}$ gehört. - Ist nun $h > 0$, so gilt nach Satz 4* D

$$(12) \quad D_\varphi(\xi_0, \xi, \xi+h) \leq 0,$$

gleichgültig, ob $\xi_0 < \xi < \xi + h$ oder $\xi < \xi + h < \xi_0$. Es folgt

$$(13) \quad \left| \frac{u(\xi_0)}{u(\xi) - u(\xi + h)} \cdot \frac{v(\xi_0)}{v(\xi) - v(\xi + h)} \cdot \frac{\varphi(\xi_0)}{\varphi(\xi) - \varphi(\xi + h)} \right| \geq 0$$

$$\frac{-h}{u(\xi + h)} \quad \frac{-h}{v(\xi + h)} \quad \frac{-h}{\varphi(\xi + h)}$$

und wegen der Differenzierbarkeit

$$(13') \quad \Theta_{\varphi+}(\xi_0, \xi, \xi) \geq 0.$$

Ist dagegen $h < 0$, so findet man entsprechend

$$(13'') \quad \Theta_{\varphi-}(\xi_0, \xi, \xi) \geq 0.$$

Aus (13'), (13'') folgt nach Def. 4 die Behauptung.

§ 5 : "Stützfunktionen" bei m-ek. Funktionen.

Zunächst sei daran erinnert, daß eine konvexe Funktion $\varphi(x)$ an jeder Stelle $x = a$ eine Stützgerade besitzt, d.h. eine Gerade $\sigma_a(x)$ derart, daß $\sigma_a(a) = \varphi(a)$ und daß $\sigma_a(x) \geq \varphi(x)$. Diese Gerade $\sigma_a(x)$ erhält man, wenn man (vgl. Figur Seite 10) $b \rightarrow a$ rücken läßt, aus s_{ab} . Etwas ganz Entsprechendes gilt auch hier, nämlich als Grenzfall von Satz 4* C der

Satz 12*: $\varphi(x)$ sei m-ek., und a sei innerer Punkt von $\mathcal{M}_{\alpha\beta}$. Es sei $\varphi'(a)$ eine verallgemeinerte Ableitung von $\varphi(x)$ auf $\mathcal{M}_{\alpha\beta}$ in $\xi = a$. Dann gilt für diejenige Lösung $\sigma_a(x)$ von $L \langle y \rangle = 0$, die durch den Punkt $(a, \varphi(a))$ geht und dort den Richtungskoeffizienten $\varphi'(a)$ hat:

$$\sigma_a(\xi) \geq \varphi(\xi) \quad \text{für } \xi \text{ aus } \mathcal{M}_{\alpha\beta}.$$

Bew.: Die Lösung von $L \langle y \rangle = 0$ mit den angegebenen Eigenschaften ist offenbar

$$\sigma_a(x) = \frac{1}{W(a)} [\varphi(a) g'(x, a) - \varphi'(a) g(x, a)].$$

Daraus folgt, daß

$$\sigma_a(\xi) - \varphi(\xi) = \frac{\Theta_{\varphi}(\xi, a, a)}{W(a)}.$$

Satz 11* liefert dann schon die Behauptung.

Hiermit beenden wir vorläufig die Untersuchungen der m-ek. Funktionen; diese werden in Abschnitt V fortgesetzt.

IV. Allgemeine Eigenschaften

der ek. Funktionen.

Im vorigen Abschnitt haben wir die Eigenschaften der m-ek. Funktionen auf Untermengen $\mathcal{M}_{\alpha\beta}$ ihres Definitionsintervalls J untersucht. Dies hatte sich so ergeben: In der Determinante (I,2*) der Def.1* war das Argument der Funktionen in der 2.Zeile der durch die Argumente a und b in der 1. und 3.Zeile bestimmte Wert $m(a,b)$. Diese Beschränkung in der Wahl des Arguments in der 2.Zeile wurde Schritt für Schritt beseitigt, und wir gelangten so zu Satz 4*C und zur Determinanten-Bedingung (III,7) in Satz 4*D, wo die genannten drei Argumente beliebige, der Größe nach geordnete Zahlen der auf J dichten Untermenge $\mathcal{M}_{\alpha\beta}$ sein durften. Aus Satz 4*C und 4*D konnten dann die wichtigsten Eigenschaften der m-ek. Funktionen leicht hergeleitet werden.

Bei den ek. Funktionen liegen die Dinge wesentlich einfacher. In der Determinante (I,2) der Def.1 darf das x_2 ein beliebiger, zwischen x_1 und x_3 gelegener Punkt von J sein. M.a.W.: Den zu Satz 4*D analogen Satz hat man hier unmittelbar per definitionem mit der zusätzlichen Vereinfachung, daß die Argumente dem J selbst und keiner Untermenge von J zu entnehmen sind. (Der zu Satz 4*C analoge Satz 4 wurde bereits aus Def.1 gewonnen.)

Im folgenden sollen die Eigenschaften, die wir im vorigen Abschnitt für m-ek. Funktionen fanden, für ek. Funktionen genannt werden. Beweise erübrigen sich; es würde sich nach dem Gesagten um Wiederholungen in dahingehend vereinfachter Form handeln, als die Beschränkung der Argumente auf die Untermengen $\mathcal{M}_{\alpha\beta}$ von J fortfällt. Wir werden aber unser Augenmerk auf das besondere Verhalten der ek. Funktionen am Rande ihres Definitionsintervalls J richten, wie dies bereits angekündigt worden ist.

§ 1 : Stetigkeit und Beschränktheit ek. Funktionen.

Als erste der erwähnten Übertragungen nennen wir in Analogie zu Satz 6* den

Satz 6 : Die ek. Funktion $\varphi(x)$ ist auf den inneren Punkten von J stetig.

Die Beschränkung auf die inneren Punkte von J ist wesentlich. Denn wenn J abgeschlossen ist, können am Rande Unstetigkeiten auftreten, was man im Spezialfall der konvexen Funktionen, etwa an der auf $\langle 0,1 \rangle$ konvexen Funktion (vgl. (I,1))

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0 \text{ und } x = 1 \\ 1 & \text{für } 0 < x < 1 \end{cases},$$

leicht erkennt.

Zur Herleitung genauerer Aussagen nehmen wir zunächst an, $\varphi(x)$ sei erklärt auf dem nach oben abgeschlossenen Intervall J und daselbst ek.; b_0 sei die obere Grenze von J .

Die mit (III,9) eingeführte Funktion $f(x_0, x)$ ist für $x_0 < x$ bzgl. x monoton nicht zunehmend. Für ein x_0 aus J wird (III,9) nach $\varphi(x)$ aufgelöst:

$$(1) \quad \varphi(x) = \frac{1}{W(x_0)} [f(x_0, x) g(x_0, x) + g'(x, x_0) \varphi(x_0)].$$

Weil für $x_0 \leq x \leq b_0$ die Funktionen $g(x_0, x)$, $g'(x, x_0)$ erklärt und stetig und die Funktion $f(x_0, x)$ erklärt und monoton ist, folgt die Existenz von

$$\lim_{x \rightarrow b_0 - 0} \varphi(x).$$

Mehr noch, man kann (1) abschätzen und erhält

$$\varphi(x) \geq \frac{1}{W(x_0)} [f(x_0, b_0) g(x_0, x) + g'(x, x_0) \varphi(x_0)],$$

woraus folgt

$$\lim_{x \rightarrow b_0 - 0} \varphi(x) \geq \frac{1}{W(x_0)} [f(x_0, b_0) g(x_0, b_0) + g'(b_0, x_0) \varphi(x_0)],$$

und wenn man (III,9) für $f(x_0, b_0)$ einsetzt:

$$\lim_{x \rightarrow b_0 - 0} \varphi(x) \geq \varphi(b_0).$$

Nach ähnlichen Betrachtungen an einer eventuellen unteren, zu J gehörigen Grenze von J kommt man so zu

Satz 6 A : Ist J nach oben abgeschlossen mit der oberen Grenze b_0 (nach unten abgeschlossen mit der unteren Grenze a_0), so existiert für eine dort erklärte ek. Funktion $\varphi(x)$ der Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow b_0 - 0} \varphi(x)$$

und es ist

$$\lim_{x \rightarrow b_0 - 0} \varphi(x) \geq \varphi(b_0)$$

(es existiert $\lim_{x \rightarrow a_0 + 0} \varphi(x)$ mit $\lim_{x \rightarrow a_0 + 0} \varphi(x) \geq \varphi(a_0)$).

Eine allgemeine Aussage, wie es mit diesen Grenzwerten steht,

falls J offen ist, ist nicht möglich. Denn die in (1) auftretenden Funktionen g und g' sind nach Def. 1 und 2 nur auf J erklärt, und über ihr Verhalten am Rande ist nichts vorausgesetzt. In Spezialfällen wird man sich jedoch stets Klarheit verschaffen können.

Satz 7 : Zwischen zwei zu J gehörigen Punkten a, b ist die ek. Funktion $\varphi(x)$ nach unten beschränkt.

Falls J abgeschlossen ist, folgt jedenfalls die Beschränktheit nach unten für ganz J . Ist aber J offen, so braucht das nicht der Fall zu sein, wie folgendes Beispiel einer auf $J: (0,1)$ konvexen Funktion lehrt:

$$\varphi(x) = \frac{-1}{x(1-x)} .$$

Satz 8 : Eine auf J ek. Funktion ist dort nach oben beschränkt.

Satz 9 : Zwischen zwei inneren Punkten a, b von J ist die ek. Funktion $\varphi(x)$ gleichmäßig stetig.

§ 2 : Zur Differenzierbarkeit ek. Funktionen.

Satz 10 : Jede auf J ek. Funktion $\varphi(x)$ ist auf den inneren Punkten von J rechts- und linksseitig differenzierbar, und es ist

$$\varphi'_-(x) \geq \varphi'_+(x) .$$

An eventuellen Randpunkten von J braucht keine einseitige Differenzierbarkeit vorzuliegen. Als Beispiel sei die auf $J: <0,1>$ konvexe Funktion

$$\varphi(x) = \sqrt{x - x^2}$$

angeführt, deren Bild der obere Halbkreis um $(\frac{1}{2}, 0)$ mit $r = \frac{1}{2}$ ist.

Wie unter Satz 6 sei zur Herleitung genauerer Aussagen angenommen, $\varphi(x)$ sei auf dem nach oben abgeschlossenen Intervall J ek.; b_0 sei die obere Grenze von J .

Man wähle x_1 und x_2 aus J mit $x_1 < x_2 < b_0$. Dann folgt aus der Monotonie von $f(x_0, x)$

$$f(b_0, x_1) \geq f(b_0, x_2) .$$

Formal, d.h. ohne Rücksicht auf die Existenz der Limites, gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(b_0, x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\varphi(x) - \varphi(b_0)}{x - b_0} ,$$

wie der 3. Beh. (III, § 4) zu entnehmen ist. Hieraus folgt nach analogen Betrachtungen an einer eventuellen unteren, zu J gehörigen Grenze a_0 der folgende

Satz 10 A : Ist J nach oben abgeschlossen mit der oberen Grenze b_0 (nach unten abgeschlossen mit der unteren Grenze a_0), so ist die dort erklärte ek. Funktion $\varphi(x)$ in $x = b_0$ linksseitig (in $x = a_0$ rechtsseitig) eigentlich oder uneigentlich differenzierbar. Im Falle der uneigentlichen Differenzierbarkeit hat die linksseitige Ableitung in $x = b_0$ den Wert $-\infty$ (die rechtsseitige in $x = a_0$ den Wert $+\infty$).

Dem sei ein weiterer Satz über das Verhalten der Ableitung ek. Funktionen angeschlossen. - Ist $h > 0$ und sind $(x_0 - 3 \cdot h)$ und x_0 aus J (x_0 kann ggf. das eben genannte b_0 sein), dann gilt nach III, § 4 die Ungleichung

$$(2) \quad f(x_0 - 2h, x_0 - 3h) \geq \varphi'(x_0 - 2h) \geq f(x_0 - 2h, x_0 - h).$$

Hier geht die mit $g(x_0 - 2 \cdot h, x_0)$ multiplizierte rechte und linke Seite gegen Null, wenn $h \rightarrow 0 + 0$ rückt, wie man leicht aus den Sätzen 2, 6, 6 A findet. Daher folgt aus (2), daß

$$\lim_{h \rightarrow 0+0} g(x_0 - 2 \cdot h, x_0) \cdot \varphi'(x_0 - 2h) = 0.$$

Mit einigen weiteren leichten Schlüssen folgt dann

Satz 10 B : Ist $\varphi(x)$ auf J ek. und ist x_0 aus J , so gilt

$$\lim_{k \rightarrow 0} g(x_0 - k, x_0) \cdot \varphi'(x_0 - k) = 0,$$

wofür man auch

$$\lim_{k \rightarrow 0} k \cdot \varphi'(x_0 - k) = 0$$

sagen kann. Das Vorzeichen von k ist lediglich der Bedingung unterworfen, daß man sich mit $(x_0 - k)$ aus J her dem x_0 nähert.

Satz 11 : $\varphi(x)$ sei ek. auf J ; x_0 sei ein beliebiger, x ein innerer Punkt von J . Dann gilt für die verallgemeinerte Ableitung Θ_φ :

$$\Theta_\varphi(x_0, x, x) \geq 0.$$

Satz 12 : $\varphi(x)$ sei ek. auf J , und a sei innerer Punkt von J . Es sei $\varphi'(a)$ eine verallgemeinerte Ableitung von $\varphi(x)$ in $x = a$. Dann gilt für diejenige Lösung $\sigma_a(x)$ von $L \langle y \rangle = 0$, die durch den Punkt $(a, \varphi(a))$ geht und dort den Richtungskoeffizienten $\varphi'(a)$ hat,

$$\sigma_a(x) \geq \varphi(x) \quad \text{für alle } x \text{ aus } J.$$

Die Beschränkung auf die inneren Punkte von J ist wesentlich, wie das Beispiel unter Satz 10 lehrt. - Wir beschließen diesen Abschnitt mit einem Satz, der für m -ek. Funktionen nicht herleitbar ist aus sogleich genannten Gründen. Als eine Art Mittelwertsatz der Differentialrechnung gilt

Satz 13 : $\varphi(x)$ sei auf J ek., $\varphi(x)$ sei eine positive, auf J stetige und zumindest auf den inneren Punkten von J differenzierbare Funktion. Ferner seien x_1, x_2 aus J mit $x_1 < x_2$. Dann gibt es ein x^* mit $x_1 < x^* < x_2$ derart, daß

$$\left(\varphi(x) \varphi'(x) \right)'_{+x=x^*} \leq \frac{\varphi(x_2) \varphi'(x_2) - \varphi(x_1) \varphi'(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \left(\varphi(x) \varphi'(x) \right)'_{-x=x^*}.$$

Bew.:

$$F(x) = \varphi(x) \varphi'(x) - \frac{\varphi(x_2) \varphi'(x_2) - \varphi(x_1) \varphi'(x_1)}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

hat nach Satz 6, 6 A in $\langle x_1, x_2 \rangle$ Extrema und ist nach Satz 10 zumindest in (x_1, x_2) rechts- und linksseitig differenzierbar. Ferner ist $F(x_1) = F(x_2) = 0$. Es möge $F(x)$ in $x = x'$ das Minimum, in $x = x''$ das Maximum annehmen, so daß $F(x') \leq 0 \leq F(x'')$. -

1. Ist $F(x') = F(x'') = 0$, so ist $F(x) \equiv 0$, und die Behauptung folgt durch Differenzieren.

2. Ist $F(x') < 0$, so liegt x' im Innern von $\langle x_1, x_2 \rangle$, und es gibt x_e, x_r mit $x_1 < x_e < x' < x_r < x_2$. Wegen $F(x') - F(x) \leq 0$ folgt dann aus

$$\frac{F(x') - F(x_e)}{x' - x_e} \leq 0 \leq \frac{F(x') - F(x_r)}{x' - x_r}$$

$$F'_-(x') \leq 0 \leq F'_+(x').$$

Nach Satz 10 muß aber sein $F'_-(x') \geq F'_+(x')$, so daß folgt

$$F'_-(x') = F'_+(x') = 0;$$

das ist ersichtlich die Behauptung. (Übrigens geht aus den letzten Schlüssen erneut hervor, daß $\varphi(x)$ im Minimum keine Ecke haben kann; vgl. die Bemerkung unter Satz 10.)

3. Ist $F(x'') > 0$, so findet man ebenso wegen $F(x'') - F(x) \geq 0$

$$F'_-(x'') \geq 0 \geq F'_+(x''),$$

wiederum die Behauptung, womit der Satz bewiesen ist.

Der Beweis dieses Satzes gelingt nicht für m -ek. Funktionen $\varphi(x)$. Betrachtet man nämlich $F(\xi)$ mit x_1, x_2, ξ aus einer Untermenge $\mathcal{M}_{\alpha\beta}$ von J , so braucht $F(\xi)$ auf den zwischen x_1 und x_2 gelegenen Punkten von $\mathcal{M}_{\alpha\beta}$ keine Extrema anzunehmen, vgl. hierzu die Bemerkung unter Satz 9*. Die Existenz von Extrema ist aber wesentlich für den Beweis.

V. Fortsetzung der Theorie der m-ek. Funktionen.

Die im vorigen Abschnitt hergeleiteten Sätze über die ek. Funktionen erlauben uns, etwas tiefergehende Aussagen über m-ek. Funktionen herzuleiten, als dies in Abschnitt III geschah.

Zur Vermeidung lästiger Fallunterscheidungen werde in diesem Abschnitt das Definitionsintervall J von $\varphi(x)$ als offen vorausgesetzt. Das wird mit J_0 angedeutet. (Falls J abgeschlossen ist, kommt man durch Fortlassung der Randpunkte sofort zu dem hier vorausgesetzten Fall.)

§ 1 : Einführung von Nebenfunktionen einer m-ek. Funktion.

Satz 14*: $\varphi(x)$ sei auf J_0 m-ek., und x_0 sei ein ganz beliebiger Punkt aus J_0 . Ist dann $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots$ irgend eine aus Punkten einer Untermenge $\mathcal{M}_{\alpha\beta}$ (Def. 3*) bestehende Folge, die gegen x_0 konvergiert, so gibt es

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \varphi(\xi_v) .$$

Bew.: Nach Voraussetzung und nach Satz 9* kann man zu $\varepsilon > 0$ zwei Punkte a, b aus $\mathcal{M}_{\alpha\beta}$ angeben, daß $a < x_0 < b$ und daß

$$(1) \quad |\varphi(\xi) - \varphi(\bar{\xi})| < \varepsilon$$

für zwischen a und b gelegene Punkte $\xi, \bar{\xi}$ aus $\mathcal{M}_{\alpha\beta}$.

Ferner gibt es nach Voraussetzung eine ganze Zahl N , daß für $k, l > N$ in (1) $\xi = \xi_k, \bar{\xi} = \xi_l$ gesetzt werden darf. Dann folgt aber nach dem allgemeinen Cauchyschen Konvergenzkriterium die Behauptung.

Durch diesen Satz wird einem nahegelegt die

Def. 5*: $\varphi(x)$ sei ek. auf J_0 ; α und β seien irgend zwei Punkte von J_0 . Dann soll die auf J_0 erklärte Funktion

$$\varphi_{\alpha\beta}(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{falls } x \text{ aus } \mathcal{M}_{\alpha\beta}, \\ \lim_{\xi \rightarrow x} \varphi(\xi) & \text{falls } x \text{ nicht aus } \mathcal{M}_{\alpha\beta} \text{ (mit } \xi \text{ aus } \mathcal{M}_{\alpha\beta}) \end{cases}$$

"zu α, β gehörige Nebenfunktion von $\varphi(x)$ " heißen.

Aus den letzten Sätzen ließen sich leicht einige Eigenschaften (Stetigkeit, Beschränktheit) der $\varphi_{\alpha\beta}(x)$ herleiten. Viel mehr zeigt man aber mit dem Beweis von

Satz 15*: Die zu α, β gehörige Nebenfunktion $\varphi_{\alpha\beta}(x)$ der m-ek. Funktion $\varphi(x)$ ist sogar ek.

Bew.: Zu zeigen ist, daß für $x_1 < x_2 < x_3$

$$D_{\varphi_{\alpha\beta}}(x_1, x_2, x_3) = \begin{vmatrix} u(x_1) & v(x_1) & \varphi_{\alpha\beta}(x_1) \\ u(x_2) & v(x_2) & \varphi_{\alpha\beta}(x_2) \\ u(x_3) & v(x_3) & \varphi_{\alpha\beta}(x_3) \end{vmatrix} \leq 0.$$

Sind x_1, x_2, x_3 nicht aus $\mathcal{M}_{\alpha\beta}$, so bilden wir für $v = 0, 1, 2, \dots$ drei Zahlenfolgen $(\xi_1^{(v)}), (\xi_2^{(v)}), (\xi_3^{(v)})$ mit folgenden Eigenschaften:

- $\xi_1^{(v)}, \xi_2^{(v)}, \xi_3^{(v)}$ sind aus $\mathcal{M}_{\alpha\beta}$,
- $\xi_1^{(v)} < \xi_2^{(v)} < \xi_3^{(v)}$,
- $\xi_1^{(v)} \rightarrow x_1, \xi_2^{(v)} \rightarrow x_2, \xi_3^{(v)} \rightarrow x_3$ wenn $v \rightarrow \infty$.

Weil dann nach Satz 4* D $D_{\varphi}(\xi_1^{(v)}, \xi_2^{(v)}, \xi_3^{(v)}) \leq 0$,

folgt auf Grund von Def. 5* die Behauptung in diesem Falle. Analog schließt man, wenn ein oder zwei Zahlen des Tripels (x_1, x_2, x_3) zu $\mathcal{M}_{\alpha\beta}$ gehören.

Auf Grund von Def. 5* ist es möglich, daß die zu α, β gehörige Nebenfunktion $\varphi_{\alpha\beta}(x)$ an allen Punkten von J_0 mit $\varphi(x)$ übereinstimmt. Dann ist nach Satz 15* die m-ek. Funktion $\varphi(x)$ sogar ek., also u.a. auf J_0 (und nicht nur auf einer Untermenge $\mathcal{M}_{\alpha\beta}$ von J_0) stetig sowie rechts- und linksseitig differenzierbar. Alle Nebenfunktionen von $\varphi(x)$ fallen dann mit $\varphi(x)$ zusammen.

Ist dies nicht der Fall, so gibt es einen Punkt x_0 von J_0 , wofür

$$(2) \quad \lim_{\xi \rightarrow x_0} \varphi(\xi) \neq \varphi(x_0), \quad \xi \text{ aus } \mathcal{M}_{\alpha\beta}.$$

Dies sei im folgenden vorausgesetzt.

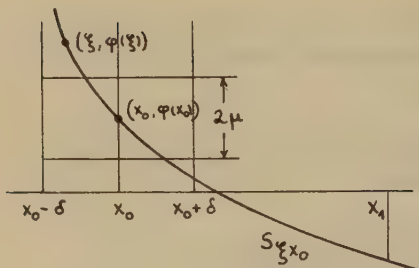
Nach Satz 9* gibt es dann zwei positive Zahlen μ und δ , daß

$$(3) \quad \text{entweder } \varphi(\xi) - \varphi(x_0) > \mu \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{für alle zu } \mathcal{M}_{\alpha\beta} \text{ gehörigen} \\ \text{oder } \varphi(x_0) - \varphi(\xi) > \mu \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi \text{ aus } \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Für derartige ξ betrachten wir nach (II, 3)

$$(4) \quad s_{\xi x_0}(x) = \varphi(\xi) \frac{g(x_0, x)}{g(x_0, \xi)} + \varphi(x_0) \frac{g(\xi, x)}{g(\xi, x_0)}.$$

Ein beliebiges, aber festes und von x_0 verschiedenes x_1 wird gewählt und damit $s_{\xi x_0}(x_1)$ gebildet. Wir behaupten, daß $s_{\xi x_0}(x_1)$



durch geeignete Wahl von ξ kleiner gemacht werden kann als jede vorgegebene Zahl. - Zum Beweise dessen darf o.B.d.A. angenommen werden, daß x_1 außerhalb von $\langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle$ liegt. Ferner soll $x_0 < x_1$ vorausgesetzt werden, für $x_0 > x_1$ würde der Beweis analog verlaufen.

Liegt der (gezeichnete) Fall (3) vor, dann wird ξ aus $\mathcal{M}_{\alpha\beta}$ so gewählt, daß $x_0 - \delta < \xi < x_0 < x_1$; und es ist nach Satz 1

$$\frac{g(\xi, x_1)}{g(\xi, x_0)} > 0.$$

Liegt dagegen der Fall (3') vor, dann wird ξ aus $\mathcal{M}_{\alpha\beta}$ so gewählt, daß $x_0 < \xi < x_0 + \delta < x_1$; und es ist

$$\frac{g(\xi, x_1)}{g(\xi, x_0)} < 0.$$

Für beide Fälle (3), (3') folgt daher

$$\varphi(x_0) \frac{g(\xi, x_1)}{g(\xi, x_0)} < \varphi(\xi) \frac{g(\xi, x_1)}{g(\xi, x_0)} - \mu \cdot \left| \frac{g(\xi, x_1)}{g(\xi, x_0)} \right|,$$

so daß nach (4)

$$S_{\xi x_0}(x_1) < -\varphi(\xi) \frac{g(x_1, x_0) - g(x_1, \xi)}{g(x_0, \xi)} - \mu \cdot \left| \frac{g(\xi, x_1)}{g(\xi, x_0)} \right|.$$

Hier ist $\varphi(\xi)$ (nach Satz 7*, 8*) sowie, wie eine leichte Nebetrachtung zeigt, auch der Faktor von $\varphi(\xi)$ beschränkt; es ist $g(x_0, x_1) \neq 0$. Daher folgt

$$S_{\xi x_0}(x_1) < M_1 - \frac{M_2}{|g(\xi, x_0)|} \quad (M_1, M_2 > 0).$$

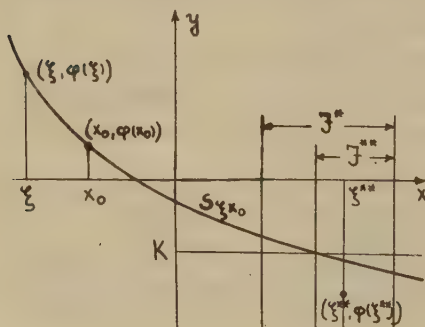
Indem man ξ hinreichend nahe bei x_0 wählt, kann also wirklich $S_{\xi x_0}(x_1)$ kleiner gemacht werden als jede vorgegebene Zahl.

Man kann daher, weiterhin unter der Voraussetzung (2), folgendes sagen: Ist ein beliebiges Teilintervall J^* von J_0 sowie eine Zahl

K gegeben, so existiert ein ξ aus $\mathcal{M}_{\alpha\beta}$, daß $S_{\xi x_0}$ in einem Teilintervall J^{**} von J^* kleiner als K ist.

Bildet man nun nach Def. 3* die Menge $\mathcal{M}_{\xi x_0}$, so liegen in J^{**} noch Punkte ξ^{**} , die zu $\mathcal{M}_{\xi x_0}$ (und nicht zu $\langle \xi, x_0 \rangle$) gehören. Nach Satz 4* B ist daher

$$\varphi(\xi^{**}) \leq S_{\xi x_0}(\xi^{**}) < K.$$



Wir fassen diese Ergebnisse zusammen zu

Satz 16*: Eine auf J_0 erklärte, m-ek. Funktion ist entweder ek. oder aber in keinem Teilintervall von J_0 nach unten beschränkt.

Ein analoger Satz gilt über die Beschränktheit nach oben. Zu dessen Beweis muß noch, auf Def. 5* fußend, eine Hilfsfunktion eingeführt werden.

§ 2 : Die "obere Grenze" der m-ek. Funktionen.

Def. 6*: $\varphi(x)$ sei m-ek. auf J_0 , x_0 sei ein Punkt aus J_0 . Hat dann die Menge $\{\varphi_\alpha(x_0)\}$ eine endliche obere Grenze, so werde sie mit $M_\varphi(x_0)$ bezeichnet.

Hiermit und mit Def. 5* ergibt sich unmittelbar

Satz 17*: Gibt es $M_\varphi(x_0)$, so liegen in jedem unteren Halbkreis $\mathcal{H}$ um den Punkt $(x_0, M_\varphi(x_0))$ noch Punkte $(x, \varphi(x))$, und es ist

$$\varphi(x_0) \leq M_\varphi(x_0).$$

Gibt es dagegen $M_\varphi(x_0)$ nicht, so ist $\varphi(x)$ in keinem, x_0 enthaltenden Intervall nach oben beschränkt.

Wir werden nun zeigen

Satz 18*: Die auf J_0 m-ek. Funktion $\varphi(x)$ ist entweder in jedem oder in keinem Teilintervall von J_0 nach oben beschränkt.

Es genügt, statt dieses Satzes den folgenden zu beweisen:

Satz 19*: Ist $\varphi(x)$ auf J_0 m-ek., so existiert $M_\varphi(x)$ entweder an jeder oder an keiner Stelle von J_0 .

Bew.: Angenommen, es gäbe $M_\varphi(a)$, aber $M_\varphi(b)$ existiere nicht. Es sei $a < b$; den Fall $a > b$ führt man analog zum Widerspruch.

Man wähle ein positives δ , daß das Intervall $(b-\delta, b+\delta)$ rechts von a , aber noch ganz in J_0 gelegen ist. Nach Voraussetzung gibt es in diesem Intervall eine Punktfolge (b_v) mit $v=1,2,3,\dots$, daß

$$\varphi(b_v) \rightarrow \infty \quad \text{mit} \quad v \rightarrow \infty.$$

Man wähle ferner ein c aus J_0 , $c < a$, und bilde die Funktionenfolge

$$S_{cb_v}(x) = \varphi(c) \frac{g(b_v, x)}{g(b_v, c)} + \varphi(b_v) \frac{g(c, x)}{g(c, b_v)},$$

$$v = 1, 2, 3, \dots$$

Offenbar gilt

$$(5) \quad s_{cb_v}(a) \rightarrow \infty \quad \text{wenn} \quad v \rightarrow \infty.$$

Weil nun die Nebenfunktionen $\varphi_{cb_v}(x)$ nach Satz 15* ek. sind, ist

$$(6) \quad \varphi_{cb_v}(a) \geq s_{cb_v}(a).$$

Die Aussagen (5) und (6) haben aber nach Def. 6* zur Folge, daß $M_\varphi(a)$ nicht existiert. Dies ist ein Widerspruch.

Der damit bewiesene Satz 19* bildet die Grundlage für einen weiteren Satz über $M_\varphi(x)$, nämlich für

Satz 20*: $\varphi(x)$ sei auf J_0 m-ek., und es existiere $M_\varphi(x)$. Dann ist $M_\varphi(x)$ auf J_0 ek.

Bew.: Es ist die Annahme (vgl. Satz 4)

$$(7) \quad S_{x_1 x_3}^{(M)}(x_2) = M_\varphi(x_1) \frac{g(x_3, x_2)}{g(x_3, x_1)} + M_\varphi(x_3) \frac{g(x_1, x_2)}{g(x_1, x_3)} > M_\varphi(x_2) \\ \text{für } x_1 < x_2 < x_3$$

zu widerlegen. (Nach dieser Annahme ist die Figur gezeichnet.)

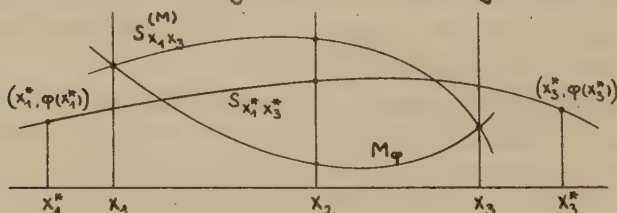
Zu diesem Zwecke wählt man nach Satz 17* in der Umgebung von x_1 einen Punkt x_1^* und in der Umgebung von x_3 einen Punkt x_3^* so, daß

$(x_1^*, \varphi(x_1^*))$ so nahe bei $(x_1, M_\varphi(x_1))$ und

$(x_3^*, \varphi(x_3^*))$ so nahe bei $(x_3, M_\varphi(x_3))$

liegt, daß neben (7) auch noch gilt

$$(8) \quad S_{x_1^* x_3^*}(x_2) = \varphi(x_1^*) \frac{g(x_3^*, x_2)}{g(x_3^*, x_1^*)} + \varphi(x_3^*) \frac{g(x_1^*, x_2)}{g(x_1^*, x_3^*)} > M_\varphi(x_2).$$



Andererseits ist die Nebenfunktion $\varphi_{x_1^* x_3^*}$ nach Satz 15* ek., so daß (Satz 4)

$$(9) \quad \varphi_{x_1^* x_3^*}(x_2) \geq S_{x_1^* x_3^*}(x_2).$$

Die Kombination von (8) und (9) stellt aber einen Widerspruch zur Definition von $M_\varphi(x_2)$ dar.

§ 3 : Der Satz von Bernstein und Doetsch für m-ek. Funktionen.

Satz 21*: Für eine auf J_0 m-ek. Funktion $\varphi(x)$ und die in Def. 6* erklärte Funktion $M_\varphi(x)$ sind drei Fälle zu unterscheiden:

1. Es gibt $M_\varphi(x)$, und es ist $M_\varphi(x) \equiv \varphi(x)$ auf J_0 . Dann ist $\varphi(x)$ ek.
2. Es gibt $M_\varphi(x)$, aber für mindestens ein x aus J_0 ist $M_\varphi(x) \neq \varphi(x)$. Dann gibt es in jeder Umgebung jedes Punktes $P_0(x_0, y_0)$ mit x_0 aus J_0 und $y_0 \leq M_\varphi(x_0)$ noch Punkte $P(x, \varphi(x))$.
3. $M_\varphi(x)$ existiert nicht. Dann gibt es in jeder Umgebung jedes Punktes $P_0(x_0, y_0)$ mit x_0 aus J_0 und beliebigem y_0 noch Punkte $P(x, \varphi(x))$.

Bew.:

1. Dieser Fall ist durch Satz 20* erledigt.
2. In diesem Fall ist $\varphi(x)$ offenbar auf J_0 unstetig und deshalb nicht ek., daher auch in keinem Teilintervall von J_0 nach unten beschränkt. - Der Punkt $P_0(x_0, y_0)$ habe die genannten Eigenschaften. Da im Falle $y_0 = M_\varphi(x_0)$ die Behauptung in Satz 17* enthalten ist, soll $y_0 < M_\varphi(x_0)$ sein. Ist dann eine Umgebung

$\mathcal{U}: \begin{cases} x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \\ y_0 - \delta < y < y_0 + \delta \end{cases}$
von P_0 vorgegeben, so darf o.B.

d.A. angenommen werden:

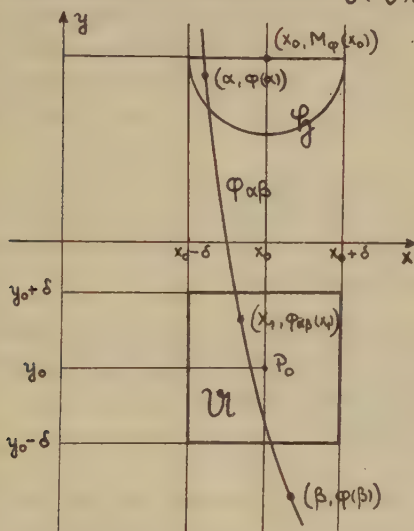
$$M_\varphi(x_0) - y_0 > 2\delta.$$

Dann liegt der untere Halbkreis $\mathcal{H}$ mit dem Radius δ um $(x_0, M_\varphi(x_0))$ oberhalb von $\mathcal{U}$. Nach Satz 17* gibt es dann einen Punkt $(\alpha, \varphi(\alpha))$ in $\mathcal{H}$, d.h. oberhalb von $\mathcal{U}$, aber es gibt auch, wie anfangs festgestellt, einen Punkt $(\beta, \varphi(\beta))$ unterhalb von $\mathcal{U}$. Die stetige Nebenfunktion $\varphi_{\alpha\beta}$ hat daher einen Punkt $(x_1, \varphi_{\alpha\beta}(x_1))$ in $\mathcal{U}$.

Nach Def. 5* gibt es dann auch einen Punkt $(x, \varphi(x))$ in $\mathcal{U}$, womit auch dieser Fall erledigt ist.

3. Auch hier kann man nach Satz 17* einen Punkt $(\alpha, \varphi(\alpha))$ oberhalb und nach Satz 16* einen Punkt $(\beta, \varphi(\beta))$ unterhalb einer beliebigen Umgebung $\mathcal{U}$ von P_0 angeben. Der Beweis verläuft dann ganz analog. - Damit ist der Satz bewiesen.

Damit sei das Studium der m-ek. Funktionen beendet; im folgenden werden nur noch die ek. Funktionen behandelt.



VI. Beispiele ek. Funktionen.

§ 1 : Über zweimal differenzierbare ek. Funktionen.

Wir hatten am Anfang der Arbeit zwei Bedingungen für konvexe Funktionen angegeben (Ungl.(I,1), Ungl.(I,1*)) und hatten darauf hingewiesen, daß die Bedingung (I,1) insofern eine Verschärfung der Bedingung (I,1*) bedeutet, daß jede der Bedingung (I,1) genügende Funktion auch unter die Bedingung (I,1*) fällt, nicht aber umgekehrt. Die so verstandene Verschärfung läßt sich aber noch weiter treiben. Man kann zunächst verlangen, daß $\varphi'(x)$ existiert und monoton nicht zunimmt; sodann kann man noch fordern, daß $\varphi''(x)$ existiert und daß $\varphi''(x) \leq 0$ ist.

Der nächste Satz enthält das Analogon zur Bedingung $\varphi''(x) \leq 0$ bei konvexen Funktionen; durch ihn wird man in die Lage versetzt, leicht Beispiele zweimal differenzierbarer ek. Funktionen angeben zu können. Mit den Bezeichnungen der Def.1 gilt

Satz 22 : Eine auf J differenzierbare Funktion $\varphi(x)$ derart, daß auch noch $(p(x) \cdot \varphi'(x))'$ existiert und im Riemannschen Sinne integrierbar ist, ist dann und nur dann ek., wenn

$$L < \varphi(x) > \leq 0 .$$

Bew.:

1. $\varphi(x)$ sei ek., und x sei ein Punkt von J , rechts von dem es noch Punkte von J gibt. Dann kann man h mit $h > 0$ so wählen, daß noch $x + h$ zu J gehört. Dann liefert Satz 11

$$\Theta_{\varphi}(x+h, x, x) \geq 0, \quad \Theta_{\varphi}(x, x+h, x+h) \geq 0 .$$

Faßt man dies geeignet zusammen, dann folgt

$$\left| \begin{array}{ccc} u(x) & v(x) & \varphi(x) \\ \frac{u(x+h) - u(x)}{h} & \frac{v(x+h) - v(x)}{h} & \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} \\ \frac{p(x+h)u'(x+h) - p(x)u'(x)}{h} & \frac{p(x+h)v'(x+h) - p(x)v'(x)}{h} & \frac{p(x+h)\varphi'(x+h) - p(x)\varphi'(x)}{h} \end{array} \right| \leq 0 .$$

Da nun sogar noch $(p(x) \cdot \varphi'(x))$ differenzierbar ist, ergibt sich unter Berücksichtigung von (I,5)

$$W(x) L < \varphi(x) > \leq 0 ,$$

so daß auch $L\langle\varphi(x)\rangle \leq 0$. - Den bisher ausgeschlossenen Fall, daß es rechts von x keinen Punkt von J mehr gibt, erledigt man entsprechend durch negative Wahl von h .

2. Es sei $L\langle\varphi(x)\rangle \leq 0$. Da $L\langle u \rangle = L\langle v \rangle = 0$, hat man

$$L\langle D_{\varphi}(a, x, b) \rangle = -g(a, b) L\langle\varphi(x)\rangle.$$

Mit $L\langle\varphi\rangle$ ist also auch $L\langle D_{\varphi}\rangle$ integrierbar, und es ist, wenn man $a < x < b$ voraussetzt, $L\langle D_{\varphi}(a, x, b) \rangle \geq 0$. Für $x_1 < x_2 < x_3$ gilt daher

$$\int_{x_2}^{x_3} g(x_3, x) \cdot L\langle D_{\varphi}(x_2, x, x_3) \rangle dx \leq 0 \leq \int_{x_1}^{x_2} g(x_1, x) \cdot L\langle D_{\varphi}(x_1, x, x_2) \rangle dx.$$

Auf diese Integrale wird angewendet die

Lagrangesche Identität: Gibt es $L\langle r(x) \rangle$ und $L\langle s(x) \rangle$ und sind diese Ausdrücke integrierbar, so gilt

$$(1) \quad \int_a^b [s \cdot L\langle r \rangle - r \cdot L\langle s \rangle] \cdot dx = [p \cdot (s \cdot r' - s' \cdot r)]_a^b.$$

Das führt auf

$$\Theta_{\varphi}(x_2, x_2, x_3) \leq 0, \quad \Theta_{\varphi}(x_1, x_2, x_2) \geq 0.$$

Hieraus folgt nach Satz 3(d) für $x_1 < x_2 < x_3$

$$D_{\varphi}(x_1, x_2, x_3) \leq 0;$$

$\varphi(x)$ ist also ek., wie behauptet.

Mit diesem Satz kann man leicht erkennen, daß der Begriff "ek." von dem herangezogenen Differentialausdruck $L\langle y \rangle$ abhängig ist. Hat man etwa die beiden folgenden, den in Def.1 an L gestellten Forderungen offenbar genügenden Differentialausdrücke

$$L_1\langle y \rangle \equiv y'' - y, \quad L_2\langle y \rangle \equiv y'' + y,$$

so erkennt man, daß $\varphi(x) \equiv 1$ zwar bezüglich L_1 , nicht aber bezüglich L_2 ek. ist.

Bisher hätte die Frage, ob eine vorgelegte Funktion ek. ist, unmittelbar nach Def.1 geklärt werden müssen, was u.U. unbequem gewesen wäre. Auf Grund des letzten Satzes ist das für zweimal differenzierbare Funktionen leicht zu entscheiden. Die folgende Abbildung zeigt einige derartige Funktionen $\varphi(x)$, die bezüglich

$$(2) \quad L\langle y \rangle \equiv y'' - (10\pi)^2 y$$

auf $\langle 0, 1 \rangle$ ek. sind, weil für sie $L\langle\varphi\rangle \leq 0$; ek. bezüglich dem genannten L sind ferner alle für $\langle 0, 1 \rangle$ im Positiven verlaufenden Geraden und alle Lösungen

$$y = C \sin 10\pi x + C^* \cos 10\pi x \quad (C, C^* \text{ Konstante})$$

von $L\langle y \rangle = 0$.

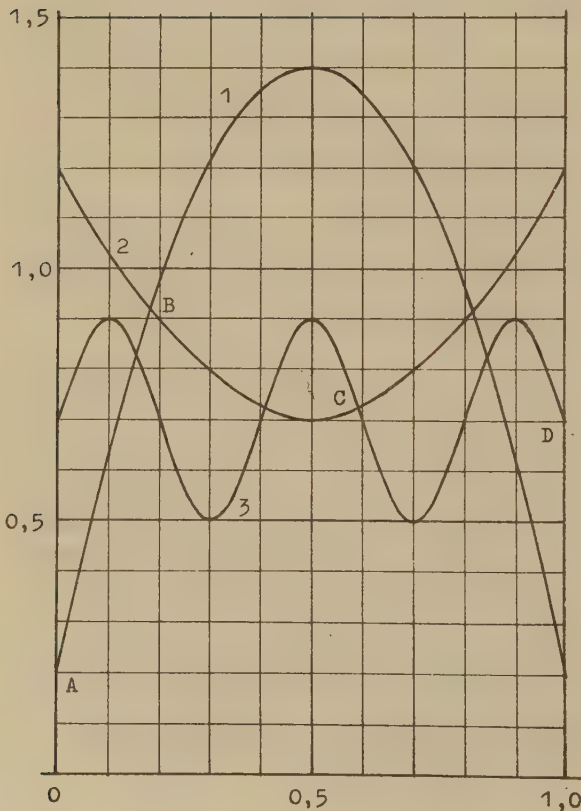
Die Abbildung verdeutlicht, daß man mit dem Wort ek. im allgemeinen nicht in der Weise eine anschauliche Vorstellung verbinden darf, wie das bei den konvexen Funktionen der Fall ist. Wesentlich ist, daß ek. Funktionen (im Gegensatz zu konvexen) sehr wohl innere Minima (sogar mehrere) haben können.

Die in der Abbildung dargestellten Funktionen sind:

$$1 : \varphi(x) = 1,4 - 4,8 \cdot (0,5 - x)^2 \quad ,$$

$$2 : \varphi(x) = 1,2 - 0,5 \cdot \sin \pi x \quad ,$$

$$3 : \varphi(x) = 0,7 + 0,2 \cdot \sin 5\pi x \quad .$$



Die Bedeutung der Punkte A,B,C,D wird auf Seite 38 (unten) erklärt.

§ 2 : Funktionen, die abschnittsweise aus ek. Funktionen bestehen.

Die folgende Aussage ist für den Fall konvexer Funktionen unmittelbar anschaulich klar.

Satz 23 : Es seien $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, ..., $\varphi_n(x)$ auf J ek., und durch

$$t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n$$

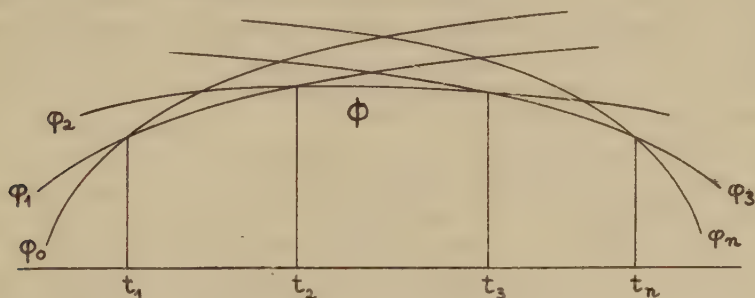
sei eine Zerlegung von J gegeben. Es sei

$$(3) \quad \varphi_{j-1}(t_j) = \varphi_j(t_j) \quad , \quad (4) \quad \varphi'_{j-1}(t_j) \geq \varphi'_j(t_j) \\ \text{für } j = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Dann ist

$$\Phi(x) = \begin{cases} \varphi_0(x) & \text{für } x \leq t_1, \quad x \text{ aus } J \\ \varphi_j(x) & \text{für } t_j \leq x \leq t_{j+1} \text{ mit } j = 1, 2, 3, \dots, n-1 \\ \varphi_n(x) & \text{für } t_n \leq x, \quad x \text{ aus } J \end{cases}$$

eine auf J ek. Funktion.



Bew.: Wir setzen $\Phi_0(x) = \varphi_0(x)$ und bilden die Funktionenfolge

$$(5) \quad \Phi_j(x) = \begin{cases} \Phi_{j-1}(x) & \text{für } x \leq t_j \\ \varphi_j(x) & \text{für } t_j \leq x \end{cases}.$$

Offenbar ist dann $\Phi_n(x) = \Phi(x)$. Da $\Phi_0(x)$ ek., muß nur noch aus der Annahme

$$(6) \quad \Phi_{j-1}(x) \quad \text{sei ek.} \quad (j = 1, 2, 3, \dots, n)$$

der Induktionsschluß gezogen werden, d.h. es ist zu zeigen

$$(7) \quad D\Phi_j(x_1, x_2, x_3) \leq 0 \quad \text{wenn } x_1 < x_2 < x_3 \quad (j = 1, 2, 3, \dots, n).$$

Ist $x_3 \leq t_j$ oder $x_1 \geq t_j$, so ist (7) trivial. Aus (7) folgt nach Satz 11 mit $\vartheta(x) \equiv 1$

$$(8) \quad \Theta_{\Phi_j}(x_m, t_j, t_j) \geq 0 \quad \text{für } x_m < t_j,$$

und mit $\vartheta(x) \equiv 0$

$$(9) \quad \Theta_{\Phi_j^+}(t_j, t_j, x_n) \leq 0 \quad \text{für } t_j < x_n.$$

Schreibt man die Determinante in (9) ausführlich hin, dann erkennt man mit (3), (4), (5), daß darin $\Phi_j^+(t_j)$ durch $\Phi_j^-(t_j)$ ersetzt werden darf, so daß auch

$$(10) \quad \Theta_{\Phi_j^-}(t_j, t_j, x_n) \leq 0 \quad \text{für } t_j < x_n.$$

Aus (8), (10) folgt nach Satz 3 (d)

$$(11) \quad D_{\Phi_j}(x_m, t_j, x_n) \leq 0 \quad \text{für } x_m < t_j < x_n$$

Für $x_3 \leq t_j$ oder $x_1 \geq t_j$ war (7) trivial; (11) liefert (7) auch für den Fall $x_1 < x_2 = t_j < x_3$. Zu untersuchen bleiben nur die beiden folgenden Fälle:

1. $x_1 < t_j < x_2 < x_3$. Dann liefert (11)

$$(12) \quad D_{\Phi_j}(x_1, t_j, x_2) \leq 0.$$

In $\langle t_j, x_3 \rangle$ ist $\Phi_j = \varphi_j$; daher ist $D_{\Phi_j}(t_j, x_2, x_3) \leq 0$ oder

$$(13) \quad D_{\Phi_j}(x_2, t_j, x_3) \geq 0.$$

Satz 3 (c) liefert aus (12) und (13)

$$g(x_2, t_j) \cdot D_{\Phi_j}(x_1, x_2, x_3) \geq 0,$$

also wieder (7).

2. $x_1 < x_2 < t_j < x_3$. Analog findet man aus (11)

$$(12') \quad D_{\Phi_j}(x_2, t_j, x_3) \leq 0,$$

und wie eben auch

$$(13') \quad D_{\Phi_j}(x_1, t_j, x_2) \geq 0.$$

Satz 3 (c) liefert auch hier aus (12') und (13')

$$D_{\Phi_j}(x_1, x_2, x_3) \leq 0,$$

wiederum (7).

Damit ist der Beweis vollständig geführt.

Dieser Satz erlaubt zum Beispiel sofort die Aussage, daß der Kurvenzug $A B C D$ (Seite 36) das Bild einer auf $J: \langle 0, 1 \rangle$ bezüglich dem L in (2) ek. Funktion ist. Denn die einzelnen Stücke sind ek., und an den Knickstellen ist die linksseitige Ableitung stets größer als die rechtsseitige.

VII. Über monotone Funktionen,

die aus ek. gebildet werden.

In Abschnitt IV hatten wir die Stetigkeit sowie die rechts- und linksseitige Differenzierbarkeit der ek. Funktionen an den inneren Punkten ihres Definitionsintervalls J nachgewiesen. Die sich daraus ergebende Frage nach dem Verhalten ek. Funktionen am Rande von J war im selben Abschnitt eingehend untersucht worden. Für offene Intervalle J hatte sich gezeigt, daß hierauf keine Antwort möglich ist, solange keine Zusatzvoraussetzungen über das Verhalten der Lösungen von $L\langle y \rangle = 0$ am Rande von J getroffen werden. Für abgeschlossenes J lieferten dagegen die Sätze 6 A, 10 A und 10 B volle Klarheit.

Für viele der folgenden Untersuchungen sind nun genauere Aussagen über das Randverhalten der betrachteten ek. Funktionen erforderlich. Man wird daher eine Beschränkung der bisher gewährten vollen Allgemeinheit vornehmen müssen:

Von jetzt an wird vorausgesetzt, J solle abgeschlossen sein.

Dann darf man auch annehmen, J sei speziell das Intervall $\langle 0, 1 \rangle$. Nach Satz 6 A existieren dann

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} \varphi(x) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 1-0} \varphi(x) \quad .$$

Dies berechtigt uns zu der zusätzlichen Forderung, daß

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow 0+0} \varphi(x) = \varphi(0) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 1-0} \varphi(x) = \varphi(1)$$

sein soll. (Diese Forderung stellen auch Blaschke und Pick, S. 278 in 6.)

Klarheit über das Randverhalten hätte man übrigens einfacher auch dadurch erhalten können, daß man alle Untersuchungen der auf J ek. Funktion $\varphi(x)$ beschränkt hätte auf ein abgeschlossenes Teilintervall J_1 von J derart, daß die Randpunkte von J_1 innere Punkte von J sind. Dann ist $\varphi(x)$ auf allen Punkten von J_1 stetig und rechts- und linksseitig differenzierbar; das Verhalten am Rande wäre klar. Nach Satz 10 A würde dies aber eine weitergehende Beschränkung der Allgemeinheit bedeuten als die obigen Forderungen.

§ 1 : Definition und Monotonie der $m_\varphi(x_0, x)$;

ihre anschauliche Bedeutung.

Für den weiteren Ausbau der Theorie erweist es sich als zweckmäßig, neben der ek. Funktion $\varphi(x)$ eine weitere, aus $\varphi(x)$ zu bildende Funktion $m_\varphi(x_0, x)$ zu betrachten.

Def. 7 : Es sei für ek. $\varphi(x)$

$$m_\varphi(x_0, x) = \frac{1}{W(x)} \cdot \left| \begin{array}{cc} \varphi(x) & g(x_0, x) \\ \varphi'(x) & g'(x_0, x) \end{array} \right| .$$

Darin ist $\varphi'(x)$ eine (vgl. Def. 4) beliebige verallgemeinerte Ableitung der auf $<0, 1>$ erklärten Funktion $\varphi(x)$. Nach Satz 10 ist $m_\varphi(x_0, x)$ für $0 \leq x_0 \leq 1$, $0 < x < 1$ erklärt. Da aber die folgenden Grenzwerte existieren (Satz 10 B und Gl. (1)) und den angegebenen Wert haben:

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow 0+0} m_\varphi(0, x) = \varphi(0) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 1-0} m_\varphi(1, x) = \varphi(1) \quad ,$$

ist als Ergänzung zu Def. 7 sinnvoll

Def. 7 a : $m_\varphi(0, 0) = \varphi(0) \quad , \quad m_\varphi(1, 1) = \varphi(1) \quad .$

Dadurch wird $m_\varphi(0, x)$ bei $x = 0$ rechtsseitig und $m_\varphi(1, x)$ bei $x = 1$ linksseitig stetig. - Die wichtigsten Eigenschaften der m_φ stellen wir zusammen zu

Satz 24 : Für ek. $\varphi(x)$ ist $m_\varphi(x_0, x)$ als Funktion von x
für $x > x_0$ monoton nicht abnehmend,
für $x < x_0$ monoton nicht zunehmend.

Ist $\varphi(x) \geq 0$, so ist auch $m_\varphi(x_0, x) \geq 0$.

Bew.: Man erkennt leicht, daß

$$(3) \quad m_\varphi(x_0, x) = \varphi(x_0) + \frac{\Theta_\varphi(x_0, x, x)}{W(x)} .$$

Daran liest man zunächst mit Satz 11 die Vorzeichenaussage ab. Ein Blick auf Def. 7 lehrt sodann, daß $m_\varphi(x_0, x)$ als Funktion von x_0 Lösung ist von $L\langle y \rangle = 0$; dasselbe gilt dann auch für die Differenz

$$(4) \quad m_\varphi(x_0, x_2) - m_\varphi(x_0, x_1) .$$

Sie läßt sich auch anders schreiben, wenn man ihre Werte an den Stellen $x_0 = x_1$ und $x_0 = x_2$ bildet sowie (II, 1) und die dortigen Erwägungen beachtet. Dann ergibt sich für (4):

$$(5) \quad m_\varphi(x_0, x_2) - m_\varphi(x_0, x_1) = \frac{g(x_2, x_0)}{g(x_2, x_1)} \cdot \frac{\Theta_\varphi(x_1, x_2, x_2)}{W(x_2)} - \frac{g(x_1, x_0)}{g(x_1, x_2)} \cdot \frac{\Theta_\varphi(x_2, x_1, x_1)}{W(x_1)} .$$

Aus (5) folgt nach Satz 11 in Verbindung mit Satz 1 :

$$m_{\varphi}(x_0, x_2) - m_{\varphi}(x_0, x_1) \begin{cases} \geq 0 & \text{für } 0 \leq x_0 < x_1 < x_2 \leq 1, \\ \leq 0 & \text{für } 0 < x_1 < x_2 < x_0 \leq 1. \end{cases}$$

Das ist die Behauptung.

Wir wollen diesen Satz noch etwas betrachten. Zunächst erkennt man, daß der Beweis kürzer geworden wäre, wenn man die Existenz von $L\langle\varphi(x)\rangle$ vorausgesetzt hätte. Dann ist nämlich nach Satz 22 $L\langle\varphi(x)\rangle \leq 0$, und die Lagrangesche Identität (VI,1) ergibt unter Beachtung von $p(x) \cdot W(x) = C = \text{const} > 0$

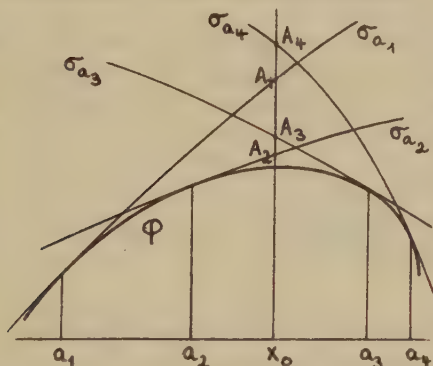
$$\begin{aligned} &\text{für } x_0 < x_1 < x_2: 0 \geq \} \cdot \frac{1}{C} \int_{x_1}^{x_2} g(x_0, x) L\langle\varphi\rangle dx = \left[-m_{\varphi}(x_0, x) \right]_{x_1}^{x_2}, \\ &\text{für } x_1 < x_2 < x_0: 0 \leq \} \end{aligned}$$

und das ist wiederum die Monotonie. Dieser Beziehung entnimmt man ferner, daß $m_{\varphi}(x_0, x) = \text{const}$, wenn $L\langle\varphi(x)\rangle = 0$.

Der letzte Satz hat aber auch eine anschauliche Bedeutung. Um diese zu erkennen, gehen wir auf die in Satz 12 (bzw. 12*) betrachtete, in $x = a$ an $\varphi(x)$ gelegte Stützfunktion $\sigma_a(x)$ zurück, für die dort

$$\sigma_a(x) - \varphi(x) = \frac{\Theta_{\varphi}(x, a, a)}{W(a)}$$

gefunden wurde. Vergleicht man dies mit (3), dann hat man



$$(6) \quad \sigma_a(x_0) = m_{\varphi}(x_0, a).$$

Mit (6) kann die Monotonie von $m_{\varphi}(x_0, a)$ bei veränderlichem a , festem x_0 so gedeutet werden, daß mit zunehmendem a der Schnitt A von σ_a mit der Ordinate in x_0 nicht steigt, wenn $a < x_0$, und nicht sinkt, wenn $a > x_0$. Das ist im Spezialfall konvexer Funktionen unmittelbar anschaulich klar.

§ 2 : Das Analogon zur Monotonie der Ableitung von differenzierbaren konvexen Funktionen.

Das Analogon zur Bedingung $\varphi''(x) \leq 0$ für konvexe Funktionen hatten wir schon in Satz 22 kennengelernt; mit Hilfe des letzten Satzes kann auch das Analogon gebracht werden zu der Bedingung, $\varphi'(x)$ solle monoton nicht abnehmend sein.

Dies geschieht in

Satz 25 : $w(x)$ sei die in Def.1 geforderte stets positive Lösung von $L \langle y \rangle = 0$.

Dann ist für eine auf $\langle 0,1 \rangle$ ek. Funktion $\varphi(x)$ und für eine beliebige verallgemeinerte Ableitung $\varphi'(x)$ von $\varphi(x)$

$$(7) \quad \mu_{\varphi}(x) = \frac{1}{W(x)} \left| \frac{w(x)}{w'(x)} \frac{\varphi(x)}{\varphi'(x)} \right| = \frac{w^2(x)}{W(x)} \cdot \left(\frac{\varphi(x)}{w(x)} \right)'$$

eine auf $(0,1)$ erklärte, monoton nicht zunehmende Funktion.

Umgekehrt: Ist $\varphi(x)$ auf $\langle 0,1 \rangle$ stetig und auf $(0,1)$ differenzierbar, und ist $\mu_{\varphi}(x)$ monoton nicht zunehmend, so ist $\varphi(x)$ eine auf $\langle 0,1 \rangle$ ek. Funktion.

Vor dem Beweise sei bemerkt, daß man im Falle konvexer Funktionen $w(x) = 1$, $W(x) = 1$ setzen darf, so daß dann wirklich gilt

$$\mu_{\varphi}(x) = \varphi'(x).$$

Ferner bemerken wir noch, daß der Beweis sehr einfach wäre, wenn man voraussetzte, daß es $(p(x) \cdot \varphi'(x))'$ gibt. Wegen der Beziehung $p(x) \cdot W(x) = \text{const}$ heißt das nämlich, es solle $(\varphi'/W)'$ und damit auch (vgl.(7)) $\mu'_{\varphi}(x)$ geben. Eine einfache Zwischenrechnung ergibt

$$(7') \quad \mu'_{\varphi}(x) = \frac{w(x)}{p(0)W(0)} L \langle \varphi(x) \rangle.$$

Daß μ_{φ} monoton nicht zunimmt und daß $L \langle \varphi \rangle \leq 0$, sind also unter obiger Zusatzvoraussetzung äquivalente Aussagen. Satz 22 würde sofort die Behauptung liefern. - Im allgemeinen Fall ist der Beweis langwieriger.

Bew.: $\varphi(x)$ sei ek.. Weil offenbar

$$w(x) = w(0) \frac{g(1,x)}{g(1,0)} + w(1) \frac{g(0,x)}{g(0,1)} \quad ; \quad w(0), w(1) > 0,$$

folgt aus (7) mit Def.7

$$(8) \quad \mu_{\varphi}(x) = \frac{1}{g(0,1)} \left[w(0) \cdot m_{\varphi}(1,x) - w(1) \cdot m_{\varphi}(0,x) \right],$$

und das ist nach Satz 24 der erste Teil der Behauptung.

Ist umgekehrt $\mu_{\varphi}(x)$ monoton nicht zunehmend, dann sind die Ausdrücke in (7) integrierbar, und für x und a aus $(0,1)$ folgt

$$(9) \quad \varphi(x) = w(x) \left[\frac{\varphi(a)}{w(a)} + \int_a^x \frac{W(t)}{w^2(t)} \mu_{\varphi}(t) dt \right].$$

Zu zeigen ist

$$D_{\varphi}(x_1, x_2, x_3) \leq 0 \quad \text{für} \quad 0 \leq x_1 < x_2 < x_3 \leq 1;$$

wir setzen zunächst $0 < x_1 < x_2 < x_3 < 1$ voraus. Für $D_{\varphi}(x_1, x_2, x_3)$ ergibt sich, wenn man

$$D_w(x_1, x_2, x_3) \equiv 0 \quad (\text{I, § 3, Bem. 3})$$

beachtet und nach (II, 1)

$$w(x) = -\frac{1}{g(x_2, x_3)} \left[w(x_3) \cdot g(x, x_2) - w(x_2) \cdot g(x, x_3) \right]$$

schreibt, nach kurzer Rechnung

$$D_\varphi(x_1, x_2, x_3) =$$

$$w(x_3) g(x_1, x_2) \int_{x_2}^{x_3} \frac{W(t)}{w^2(t)} \mu_\varphi(t) dt - w(x_1) g(x_2, x_3) \int_{x_1}^{x_2} \frac{W(t)}{w^2(t)} \mu_\varphi(t) dt.$$

Hierin ist nach Voraussetzung im ersten Integral $\mu_\varphi(t) \leq \mu_\varphi(x_2)$, im zweiten Integral dagegen $-\mu_\varphi(t) \leq -\mu_\varphi(x_2)$. So folgt

$$D_\varphi(x_1, x_2, x_3) \leq \mu_\varphi(x_2) \left[w(x_3) g(x_1, x_2) \int_{x_2}^{x_3} \frac{W}{w^2} dt - w(x_1) g(x_2, x_3) \int_{x_1}^{x_2} \frac{W}{w^2} dt \right].$$

Auf die verbliebenen Integrale wird mit geeigneter Spezialisierung von a die folgende, leicht zu beweisende Formel angewendet:

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{W(x)}{y^2(x)} = \frac{1}{y(a)} \left(\frac{g(a, x)}{y(x)} \right)' \\ \text{falls } L\langle y \rangle = 0, \quad 0 \leq a \leq 1, \quad y(a) \neq 0, \quad y(x) \neq 0. \end{array} \right.$$

Dann folgt

$$\int_{x_2}^{x_3} \frac{W}{w^2} dt = \frac{g(x_2, x_3)}{w(x_2) w(x_3)}, \quad \int_{x_1}^{x_2} \frac{W}{w^2} dt = \frac{g(x_1, x_2)}{w(x_1) w(x_2)},$$

so daß wirklich $D_\varphi(x_1, x_2, x_3) \leq 0$, was zu zeigen war. - Es ist nur noch der Nachweis zu führen, daß diese letzte Ungleichung auch noch gilt, wenn $x = 0$ oder $x = 1$. Das ergibt sich aber aus dem Bewiesenen durch eine einfache Grenzwertbetrachtung unter Berücksichtigung der Stetigkeit aller in D_φ vorkommenden Funktionen. - Damit ist der Satz bewiesen.

Aus dem ersten Teil dieses Satzes läßt sich eine durchaus nicht selbstverständliche Folgerung ziehen. Wenn nämlich $\varphi(x)$ als ek. auf $\langle 0, 1 \rangle$ vorausgesetzt wird, so ergibt sich daraus unter Beachtung von (7) nach bekannten Sätzen zur Integralrechnung, daß die verallgemeinerte Ableitung $\varphi'(x)$ über $(0, 1)$ im Riemannschen Sinne integrierbar ist, und zwar für jede Wahl der nach Def. 4 das $\varphi'(x)$ bestimmenden Funktion $\vartheta(x)$. Ist nun $\varrho(x)$ eine positive, für $0 < x < 1$ stetig differenzierbare Funktion, so gilt dasselbe auch für die verallgemeinerte Ableitung $(\varrho(x)\varphi(x))'$. Insbesondere sind also

$$(\varrho(x)\varphi(x))'_- \quad , \quad (\varrho(x)\varphi(x))'_+$$

über $(0, 1)$ integrierbar.

Es sei $0 < a < b < 1$; dann geben wir mit

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

eine Zerlegung von $\langle a, b \rangle$ und wissen aus Satz 13, daß

$$(\varphi(x)\varphi(x))'_+ \Big|_{x=\xi_k} \cdot (x_{k+1} - x_k) \leq [\varphi(x)\varphi(x)]_{x_k}^{x_{k+1}} \leq (\varphi(x)\varphi(x))'_- \Big|_{x=\xi_k} \cdot (x_{k+1} - x_k)$$

$$\text{mit } x_k < \xi_k < x_{k+1} \text{ für } k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Man summiert auf und folgert in bekannter Weise aus der Integrierbarkeit, daß

$$(11) \quad \int_a^b (\varphi(x)\varphi(x))'_+ dx \leq [\varphi(x)\varphi(x)]_a^b \leq \int_a^b (\varphi(x)\varphi(x))'_- dx.$$

Die Behauptung ist nun, daß hier beide Male das Gleichheitszeichen steht. Das ist offenbar bewiesen, wenn gezeigt ist, daß

$$\int_a^b \varphi(x) [\varphi'_-(x) - \varphi'_+(x)] dx = 0,$$

und hierzu muß die Annahme widerlegt werden, daß es ein in $\langle a, b \rangle$ gelegenes Teilintervall $\langle \alpha, \beta \rangle$ und eine positive Zahl δ gibt, derart daß

$$\varphi'_-(x) - \varphi'_+(x) \geq \delta > 0 \quad \text{für } x \text{ aus } \langle \alpha, \beta \rangle.$$

Zur Widerlegung dessen betrachte man den Beweis von Satz 13.

Man erkennt, daß für die mit $\varphi(x) \equiv 1$ und $\alpha \leq x_1 < x_2 \leq \beta$ gebildete Funktion $F(x)$ der Fall 2 nicht eintreten kann, daß also für $\alpha \leq x_1 < x < x_2 \leq \beta$

$$F(x) = \varphi(x) - \varphi(x_1) - \frac{\varphi(x_2) - \varphi(x_1)}{x_2 - x_1} (x - x_1) \geq 0.$$

Mithin folgt aus der obigen Annahme, daß $\varphi(x)$ in $\langle \alpha, \beta \rangle$ sogar konvex ist. Dann ist aber (vgl. M. Krafft, 8), Seite 470)

$$\varphi'_+(x) \geq \varphi'_-(\xi) \quad \text{für } \alpha \leq x < \xi \leq \beta,$$

und gibt man eine Zerlegung

$$\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_n < t_{n+1} = \beta$$

von $\langle \alpha, \beta \rangle$, dann folgt aus unserer Annahme

$$\varphi'_+(x) \geq \varphi'_-(t_1) > \varphi'_+(t_1) \geq \varphi'_-(t_2) > \varphi'_+(t_2) \geq \dots \geq \varphi'_-(t_n) > \varphi'_+(t_n) \geq \varphi'_-(\beta)$$

und daraus

$$\varphi'_+(x) - \varphi'_-(\beta) \geq n \cdot \delta.$$

Das ist ein Widerspruch, da n beliebig groß gewählt werden kann. In (11) steht also wirklich beide Male das Gleichheitszeichen, und damit ist gewonnen

Satz 26: Es sei $\varphi(x)$ auf $\langle 0, 1 \rangle$ ek., und $f(x)$ sei eine positive, für $0 < x < 1$ stetig differenzierbare Funktion.

Ferner sei $(\varphi(x)\varphi(x))'$ eine beliebige verallgemeinerte Ableitung von $(\varphi(x)\varphi(x))$.

Dann existiert für $0 < a < b < 1$ das folgende Integral, und es hat stets den angegebenen, von $\vartheta(x)$ (Def.4) unabhängigen Wert:

$$\int_a^b (\varphi(x)\varphi(x))' dx = \varphi(b)\varphi(b) - \varphi(a)\varphi(a).$$

§ 3 : Einige formale Eigenschaften der $m_\varphi(x_0, x)$.

Aus der folgenden Identität sollen in diesem Paragraphen einige Folgerungen gezogen werden.

Satz 27 : Für $0 \leq x \leq 1$, $0 < t < 1$ ist

$$\left| \begin{array}{cc} g(0, x) & g(1, x) \\ m_\varphi(0, t) & m_\varphi(1, t) \end{array} \right| = g(0, 1) m_\varphi(x, t).$$

Bew.: Auf beiden Seiten der behaupteten Gleichung steht bezüglich der Variablen x eine Lösung von $L\langle y \rangle = 0$. Diese beiden Funktionen stimmen für $x = 0$ und $x = 1$ überein. Daraus folgt die Behauptung.

Setzt man hier zunächst $x = t$, dann ergibt sich

$$(12) \quad \varphi(x) = m_\varphi(0, x) \frac{g(1, x)}{g(1, 0)} + m_\varphi(1, x) \frac{g(0, x)}{g(0, 1)}.$$

In dieser Form lassen sich alle auf $\langle 0, 1 \rangle$ ek. Funktionen schreiben; zunächst nur für $0 < x < 1$, wegen der Zusatzvoraussetzung (1) und wegen (2) aber auch für $x = 0$ und $x = 1$. Es folgt

$$(13) \quad \lim_{x \rightarrow 0+0} m_\varphi(1, x) \frac{g(0, x)}{g(0, 1)} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 1-0} m_\varphi(0, x) \frac{g(1, x)}{g(1, 0)} = 0;$$

das wird später benutzt werden.

Will man diejenigen ek. Funktionen, die Lösung von $L\langle y \rangle = 0$ sind, in der Form (12) schreiben, und berechnet man die beiden zugehörigen m_φ , so findet man (wie schon früher bemerkt), daß es Konstante sind, während im allgemeinen bei ek. Funktionen $m_\varphi(0, x)$ monoton nicht abnimmt und $m_\varphi(1, x)$ monoton nicht zunimmt.

Sodann wird die Identität in Satz 27 nach t differenziert und $x = t$ gesetzt. Was sich dabei aus der linken Seite ergibt, ersieht man leicht aus (3). Man erhält

$$(14) \quad \varphi'(x) = m_\varphi(0, x) \frac{g'(1, x)}{g(1, 0)} + m_\varphi(1, x) \frac{g'(0, x)}{g(0, 1)}.$$

Ein Vergleich von (14) mit (12) lehrt, daß zwischen den m_φ und

den g ein Zusammenhang besteht, den man im Falle der Differenzierbarkeit der m_φ wiedergeben kann durch

$$(14') \quad m'_\varphi(0, x) \frac{g(1, x)}{g(1, 0)} + m'_\varphi(1, x) \frac{g(0, x)}{g(0, 1)} = 0.$$

Im allgemeinen Fall muß man sich begnügen mit

Satz 28 : $\varphi(x)$ sei ek. auf $\langle 0, 1 \rangle$; m_φ sei die durch Def. 4, μ_φ die durch Gl. (7) eingeführte Funktion. Dann gibt es die folgenden Stieltjes-Integrale, und sie sind gleich.

$$\int_a^x g(1, t) \cdot dm_\varphi(0, t) = \int_a^x g(0, t) \cdot dm_\varphi(1, t) = - \int_a^x \frac{g(1, t) g(0, t)}{w(t)} d\mu_\varphi(t) \\ \text{für } 0 < x < 1, \quad 0 < a < 1.$$

Bew.: Sämtliche Integranden sind für $0 \leq t \leq 1$ stetig differenzierbar. Nach Def. 7, 7a und Satz 24 ist $m_\varphi(0, t)$ bzw. $m_\varphi(1, t)$ für $0 \leq t < 1$ bzw. $0 < t \leq 1$ erklärt und monoton; $\mu_\varphi(t)$ ist nach Satz 25 für $0 < t < 1$ erklärt und monoton. Die genannten Integrale gibt es also nach der Stieltjes-Regel a (Anhang) der Reihe nach für $0 \leq x < 1$, $0 < x \leq 1$, $0 < x < 1$; dort darf man auch auf die Integrale in

$$\int_a^x g(1, t) \cdot dm_\varphi(0, t) - \int_a^x g(0, t) \cdot dm_\varphi(1, t)$$

die Stieltjes-Regel d anwenden. Dann wird daraus nach (12), (14)

$$g(1, 0) \left\{ [\varphi(t)]_a^x - \int_a^x \varphi'(t) dt \right\},$$

und dies verschwindet nach Satz 26; damit ist der linke Teil der behaupteten Gleichung bewiesen. - Andererseits folgt aus (8) für das Integral rechts in der behaupteten Gleichung

$$- \frac{w(0)}{g(0, 1)} \int_a^x \frac{g(1, t) g(0, t)}{w(t)} dm_\varphi(1, t) + \frac{w(1)}{g(0, 1)} \int_a^x \frac{g(1, t) g(0, t)}{w(t)} dm_\varphi(0, t).$$

Für den ersten Summanden etwa kann man nach der Stieltjes-Regel c und nach dem schon bewiesenen Teil des Satzes schreiben

$$- \frac{w(0)}{g(0, 1)} \int_a^x \frac{g^2(1, t)}{w(t)} dm_\varphi(0, t),$$

so daß sich für das Integral rechts in der behaupteten Gleichung ergibt

$$- \int_a^x \frac{g(1, t) g(0, t)}{w(t)} d\mu_\varphi(t) = \int_a^x \frac{w(0) \frac{g(1, t)}{g(1, 0)} + w(1) \frac{g(0, t)}{g(0, 1)}}{w(t)} g(1, t) dm_\varphi(0, t) \\ = \int_a^x g(1, t) dm_\varphi(0, t),$$

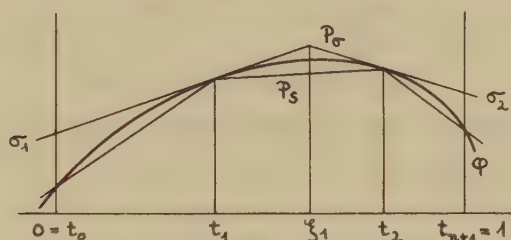
was noch zu zeigen war. - In Satz 31 folgt die erste Anwendung dieses Satzes; wichtig wird er werden in Abschnitt IX.

Endlich setzen wir in Satz 27 $t = a$ und beachten noch Gl.(6). Dann ergibt sich für die in Satz 12 behandelte, in $x = a$ an $\varphi(x)$ gelegte Stützfunktion $\sigma_a(x)$:

$$(15) \quad \sigma_a(x) = m_{\varphi}(0, a) \frac{g(1, x)}{g(1, 0)} + m_{\varphi}(1, a) \frac{g(0, x)}{g(0, 1)}.$$

Ein Vergleich von (15) mit (12) lehrt, daß man in (12) dadurch von $\varphi(x)$ zu $\sigma_a(x)$ übergehen kann, daß man die Variable x in den beiden m_{φ} an der Stelle a festhält. – Die Schreibweise (15) für $\sigma_a(x)$ wird sich sogleich als sehr nützlich erweisen.

§ 4 : Das Analogon zum einbeschriebenen Sehnen- und zum umbeschriebenen Stützgeradenpolygon bei konvexen Funktionen.



Es ist anschaulich klar, daß man einer konvexen Funktion $\varphi(x)$

1. ein selbst wieder konvexes Sehnenpolygon $P_S(x)$ einbeschreiben,
2. ein selbst wieder konvexes Stützgeradenpolygon $P_{\sigma}(x)$ umbeschreiben kann. Entsprechendes gilt auch im allgemeinen Fall ek. Funktionen. Wir behandeln zunächst die zweitgenannte Möglichkeit, die erstgenannte wird anschließend folgen.

Satz 29 : Ist $\varphi(x)$ auf $\langle 0, 1 \rangle$ ek. und ist

$$\exists : 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n < 1$$

eine beliebige Zerlegung von $\langle 0, 1 \rangle$, so gibt es Zahlen

$$\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}, \xi_n$$

mit

$$0 = \xi_0 < t_1 \leq \xi_1 \leq t_2 \leq \xi_2 \leq t_3 \leq \dots \leq \xi_{n-1} \leq t_n \leq \xi_n = 1$$

derart, daß

$$P_{\sigma}(x) = \sigma_j(x) = m_{\varphi}(0, t_j) \frac{g(1, x)}{g(1, 0)} + m_{\varphi}(1, t_j) \frac{g(0, x)}{g(0, 1)}.$$

$$(x \text{ aus } \langle \xi_{j-1}, \xi_j \rangle, \quad j = 1, 2, 3, \dots, n)$$

eine ek. Funktion ist, die abschnittsweise aus Lösungen von

$L \langle y \rangle = 0$ besteht, und für die gilt

$$P_{\sigma}(t_j) = \varphi(t_j), \quad \varphi_-(t_j) \geq P_{\sigma}(t_j) \geq \varphi_+(t_j), \\ (j = 1, 2, 3, \dots, n)$$

$$P_{\sigma}(x) \geq \varphi(x) \quad \text{für } 0 \leq x \leq 1.$$

Bew.: Wegen Satz 12 und Gl. (15) sind nur noch die ξ_j für $j = 1, 2, 3, \dots, n-1$ zu erklären und der Nachweis zu führen, daß $P_{\sigma}(x)$ ek. ist. Für die eben genannten j betrachten wir die in der Behauptung erklärten Funktionen $\sigma_j(x)$, $\sigma_{j+1}(x)$. Wie aus Satz 12 sofort folgt, ist

$$\sigma_j(x) - \sigma_{j+1}(x) \begin{cases} \leq 0 & \text{für } x = t_j \\ \geq 0 & \text{für } x = t_{j+1} \end{cases}.$$

Daher gibt es mindestens ein ξ_j aus $\langle t_j, t_{j+1} \rangle$, für das

$$(16) \quad \sigma_j(\xi_j) = \sigma_{j+1}(\xi_j)$$

mit

$$(17) \quad \sigma_j'(\xi_j) \geq \sigma_{j+1}'(\xi_j).$$

Aus (16) und (17) folgt aber nach Satz 23, daß $P_{\sigma}(x)$ ek. ist.

Satz 30: Ist $\varphi(x)$ ek. auf $\langle 0, 1 \rangle$ und ist

$$\exists: 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n < t_{n+1} = 1$$

eine beliebige Zerlegung von $\langle 0, 1 \rangle$, so ist

$$P_S(x) = s_j(x) = \varphi(t_{j+1}) \frac{g(t_j, x)}{g(t_j, t_{j+1})} + \varphi(t_j) \frac{g(t_{j+1}, x)}{g(t_{j+1}, t_j)}$$

$$\text{für } t_j \leq x \leq t_{j+1}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, n$$

eine ek. Funktion, die abschnittsweise aus Lösungen von $L \langle y \rangle = 0$ besteht, und für die gilt

$$P_S(t_j) = \varphi(t_j), \quad P_S(x) \leq \varphi(x) \\ \text{für } j = 0, 1, 2, \dots, n, n+1 \quad \text{für } 0 \leq x \leq 1.$$

Bew.: Wegen Satz 4 ist nur noch zu beweisen, daß $P_S(x)$ ek. ist. Dieser Nachweis wird wieder mit Satz 23 erbracht. Man übersieht sogar sofort, daß nur noch zu zeigen ist:

$$s_{j+1}'(t_j) - s_{j+1}'(t_j) \leq 0 \quad \text{für } j = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Von positiven Faktoren abgesehen, findet man aber für diese Differenz unter Benutzung von Satz 3 (b) den Ausdruck

$$D_{\varphi}(t_{j-1}, t_j, t_{j+1}),$$

der tatsächlich ≤ 0 ist, da $\varphi(x)$ ek. sein soll. Damit ist der Satz schon bewiesen.

Wir stellen nun allgemein die Frage, ob man durch Verfeinerung

der Zerlegung $\mathfrak{Z}$ erreichen kann, daß $P_\sigma(x)$ und $P_S(x)$ sich in ganz $\langle 0,1 \rangle$ von $\varphi(x)$ um weniger als eine vorgegebene Differenz unterscheiden. Im Falle konvexer Funktionen und für $P_S(x)$ ist diese Frage bereits geklärt worden von M. Krafft ⁸). Wir werden zeigen

Satz 31: Ist $\varphi(x)$ auf $\langle 0,1 \rangle$ ek. und ist $\varepsilon > 0$ vorgegeben, so gilt bei hinreichend feiner Zerlegung von $\langle 0,1 \rangle$ für die in den Sätzen 29 und 30 erklärten Funktionen $P_\sigma(x)$ und $P_S(x)$:

$$0 \leq P_\sigma(x) - \varphi(x) < \varepsilon, \quad 0 \leq \varphi(x) - P_S(x) < \varepsilon$$

gleichmäßig in x für x aus $\langle 0,1 \rangle$.

Bew.: Infolge der Sätze 29 und 30 (die dortigen Bezeichnungen verwenden wir im folgenden) genügt es, zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ zu zeigen:

$$(18) \quad 0 \leq P_\sigma(x) - P_S(x) < \varepsilon \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{für } x \text{ aus } \langle 0,1 \rangle \text{ und hin-} \\ \text{reichend feine Wahl von} \\ \mathfrak{Z}: 0=t_0 < t_1 < \dots < t_n < t_{n+1}=1 \end{array} \right.$$

Nach Satz 2 bestimmen wir zunächst das für $J: \langle 0,1 \rangle$ gültige M. Es gibt dann wegen (VII,2) und Satz 24 ein $\delta > 0$ derart, daß für

$$(19) \quad 0 < t_1 \leq \delta, \quad 0 < 1 - t_n \leq \delta$$

gilt

$$(20) \quad 0 \leq m_\varphi(0, t_1) - \varphi(0) < \frac{\varepsilon}{M}, \quad 0 \leq m_\varphi(1, t_n) - \varphi(1) < \frac{\varepsilon}{M}.$$

Von vornherein werden t_1, t_n derart gewählt, daß (19) und damit (20) erfüllt ist. t_1, t_n werden für alles Weitere festgehalten.

1. Für x aus $\langle 0, t_1 \rangle$ muß nach (18) gezeigt werden

$$(18') \quad 0 \leq d_0(x) = \sigma_1(x) - s_0(x) < \varepsilon.$$

Nun ist $d_0(x)$ Lösung von $L\langle y \rangle = 0$, die durch

$$d_0(0) = m_\varphi(0, t_1) - \varphi(0), \quad d_0(t_1) = 0$$

eindeutig bestimmt ist, und zwar ist

$$d_0(x) = \frac{g(x, t_1)}{g(0, t_1)} [m_\varphi(0, t_1) - \varphi(0)].$$

Aus Satz 1 und 2 und aus (20) folgt wirklich

$$0 \leq d_0(x) < \varepsilon \quad \text{für } x \text{ aus } \langle 0, t_1 \rangle;$$

damit ist (18') bewiesen. Entsprechend schließt man für x aus dem Intervall $\langle t_n, 1 \rangle$.

2. Für x aus $\langle t_1, t_n \rangle$ ist (18) jedenfalls bewiesen, wenn gezeigt ist

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq d_j(x) = \sigma_j(x) + \sigma_{j+1}(x) - 2s_j(x) < \varepsilon \\ \text{für } x \text{ aus } \langle t_j, t_{j+1} \rangle \text{ und } j = 1, 2, 3, \dots, n-1 \\ \text{bei hinreichend feiner Wahl von } \mathfrak{Z}. \end{array} \right.$$

Das ist aber richtig, wenn sogar gezeigt ist

$$(18'') \quad \left\{ \begin{array}{l} d_j(x_j) \geq 0, \quad D_3 = \sum_{j=1}^{n-1} d_j(x_j) < \varepsilon \\ \text{für beliebiges } x_j \text{ aus } \langle t_j, t_{j+1} \rangle \text{ bei hinreichend feinem } \mathfrak{Z}. \end{array} \right.$$

Nun ist auch $d_j(x) = \sigma_j(x) + \sigma_{j+1}(x) - 2s_j(x)$ Lösung von $L\langle y \rangle = 0$, die durch (vgl. (VII, 12))

$$(21) \quad \left\{ \begin{array}{l} d_j(t_j) = [m_\varphi(0, t_{j+1}) - m_\varphi(0, t_j)] \cdot \frac{g(1, t_j)}{g(1, 0)} \\ \quad + [m_\varphi(1, t_{j+1}) - m_\varphi(1, t_j)] \cdot \frac{g(0, t_j)}{g(0, 1)} \\ d_j(t_{j+1}) = -[m_\varphi(0, t_{j+1}) - m_\varphi(0, t_j)] \cdot \frac{g(1, t_{j+1})}{g(1, 0)} \\ \quad - [m_\varphi(1, t_{j+1}) - m_\varphi(1, t_j)] \cdot \frac{g(0, t_{j+1})}{g(0, 1)} \end{array} \right.$$

eindeutig bestimmt ist, und zwar findet man

$$d_j(x) = d_j(t_j) \frac{g(x, t_{j+1})}{g(t_j, t_{j+1})} + d_j(t_{j+1}) \frac{g(t_j, x)}{g(t_j, t_{j+1})}$$

Nach Satz 30 sind $d_j(t_j)$, $d_j(t_{j+1})$ nicht negativ. Deswegen und wegen Satz 2 folgt für beliebiges x_j aus $\langle t_j, t_{j+1} \rangle$

$$0 \leq d_j(x_j) \leq M \cdot [d_j(t_j) + d_j(t_{j+1})].$$

In der Bezeichnungsweise der Behauptung (18'') folgt

$$(22) \quad 0 \leq D_3 \leq M \cdot \left[\sum_{j=1}^{n-1} d_j(t_j) + \sum_{j=1}^{n-1} d_j(t_{j+1}) \right].$$

Wir setzen nun

$$\sum_{j=1}^{n-1} d_j(t_j) = S_3, \quad \sum_{j=1}^{n-1} d_j(t_{j+1}) = S_3^*.$$

Betrachtet man (21), dann erkennt man in S_3 eine Näherungssumme für das Stieltjes-Integral

$$\frac{1}{g(1, 0)} \cdot \left[\int_{t_1}^{t_n} g(1, t) \, dm_\varphi(0, t) - \int_{t_1}^{t_n} g(0, t) \, dm_\varphi(1, t) \right]$$

und in S_3^* eine solche für das entgegengesetzt gleiche Integral. Das Integral verschwindet aber nach Satz 28. Daher streben S_3 und S_3^* gegen Null bei zunehmender Verfeinerung der Zerlegung von $\langle t_1, t_n \rangle$. Aus (22) folgt

$$0 < D_3 < \varepsilon$$

für eine hinreichend feine Zerlegung von $\langle t_1, t_n \rangle$. Das ist aber die Behauptung (18''). - Damit ist der Satz bewiesen.

VIII. Die "Knickfunktionen".

Wir erinnern an die zu Beginn des vorigen Abschnitts getroffene Verabredung, daß $J: \langle 0,1 \rangle$ das Definitionsintervall der betrachteten ek. Funktionen sein soll und daß (VII,1) gelten soll.

§ 1: Definition und erste Eigenschaften der Knickfunktionen $\hat{\phi}(x,t)$.

Zunächst wird eine Hilfsfunktion eingeführt.

Def. 8 : Es sei $K(t)$ die nicht negative Wurzel aus

$$K^2(t) = \begin{cases} \frac{1}{g^2(1,0)} \cdot \int_0^1 g^2(1,x) \cdot dx, & t = 0 \\ \frac{1}{g^2(0,t)} \int_0^t g^2(0,x) \cdot dx + \frac{1}{g^2(1,t)} \int_t^1 g^2(1,x) \cdot dx, & 0 < t < 1 \\ \frac{1}{g^2(0,1)} \int_0^1 g^2(0,x) \cdot dx, & t = 1 \end{cases}$$

Aus der Bemerkung im Anschluß an Def.2 folgt, daß ein Differentialausdruck $L\langle y \rangle$ eindeutig $K(t)$ bestimmt. Über $K(t)$ gilt

Satz 32 : $K(t)$ ist stets positiv, für $0 \leq t \leq 1$ stetig und für $0 < t < 1$ stetig differenzierbar.

Bew.: Daß stets $K(t) > 0$, folgt aus Satz 1. Die stetige Differenzierbarkeit für $0 < t < 1$ ergibt sich aus Bem.4 (I, § 3).

Zum Beweis der Stetigkeit am Rand bemerkt man, daß nach Satz 2

$$0 < \frac{1}{g^2(0,t)} \cdot \int_0^t g^2(0,x) \cdot dx = t \frac{g^2(0,\varphi)}{g^2(0,t)} < M^2 \cdot t \quad (M = \text{const}, 0 < \varphi < t).$$

Daraus ergibt sich die Behauptung für $t = 0$; entsprechend geht man für $t = 1$ vor.

Wir führen die Knickfunktionen ein durch

Def. 9 : Für $0 < t < 1$ sei

$$\hat{\phi}(x,t) = \begin{cases} \frac{g(0,x)}{K(t) \cdot g(0,t)} & \text{für } 0 \leq x \leq t \\ \frac{g(1,x)}{K(t) \cdot g(1,t)} & \text{für } t \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Außerdem sei

$$\hat{\varphi}(x, 0) = \frac{g(1, x)}{K(0)g(1, 0)} \quad , \quad \hat{\varphi}(x, 1) = \frac{g(0, x)}{K(1)g(0, 1)} \quad .$$

Die $\hat{\varphi}(x, t)$ sind ebenfalls durch den Differentialausdruck $L\langle y \rangle$ eindeutig bestimmt. Ihre wichtigsten Eigenschaften enthält

Satz 33 : Die $\hat{\varphi}(x, t)$ sind niemals negativ und

- a. als Funktionen von x mit $0 \leq x \leq 1$ ek., für alle t stetig und normiert, d.h. es ist

$$\int_0^1 \hat{\varphi}^2(x, t) dx = 1 \quad .$$

Für $t = 0$ und $t = 1$ sind sie als Lösungen von $L\langle y \rangle = 0$ überall stetig differenzierbar, für $0 < t < 1$ mit Ausnahme der Stelle $x = t$, wo die Ableitung einen Sprung hat:

$$\Delta \hat{\varphi}'_x(t, t) = \hat{\varphi}'_{x+}(t, t) - \hat{\varphi}'_{x-}(t, t) = \frac{g(0, 1)W(t)}{K(t)g(0, t)g(1, t)} < 0 \quad ;$$

- b. als Funktionen von t mit $0 \leq t \leq 1$ für $0 < x < 1$ stetig. Für $x = 0$ ($x = 1$) sind sie stetig für $0 < t \leq 1$ ($0 \leq t < 1$), jedoch bei $t = 0$ ($t = 1$) beschränkt.

Bew.: Für $\Delta \hat{\varphi}'_x(t, t)$ findet man mit Satz 3 (b) nach leichter Rechnung den behaupteten Ausdruck. - Daß $\hat{\varphi}(x, t)$ bei festem t ek. ist, leuchtet für $t = 0$ und $t = 1$ unmittelbar ein. Für $0 < t < 1$ ist ebenfalls klar, daß

$$\varphi_0(x) = \frac{g(0, x)}{K(t)g(0, t)} \quad \text{und} \quad \varphi_1(x) = \frac{g(1, x)}{K(t)g(1, t)}$$

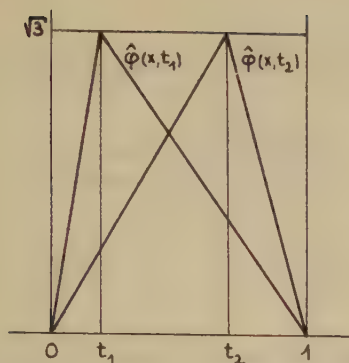
ek. sind. Da ferner

$$\varphi_0(t) = \varphi_1(t) \quad , \quad \varphi'_{1+}(t) - \varphi'_{0-}(t) = \Delta \hat{\varphi}'_x(t, t) \quad ,$$

liefert Satz 23, daß $\hat{\varphi}(x, t)$ ek. ist auch für $0 < t < 1$. Die übrigen Behauptungen ergeben sich unmittelbar aus Def.2 und 8 und aus Satz 1 und 32.

Eine allgemeine Antwort auf die Frage, wie wohl die Bilder der $\hat{\varphi}(x, t)$ aussehen, läßt sich nicht geben, weil ja die $\hat{\varphi}(x, t)$ von dem zu Grunde gelegten $L\langle y \rangle$ abhängen. Den $\hat{\varphi}(x, t)$ der Figur in (X, § 2) liegt $L\langle y \rangle \equiv y'' - 36 \cdot y$ zu Grunde; bei konvexen Funktionen, d.h. bei $L\langle y \rangle \equiv y''$, wird bekanntlich 6), 8)

$$\hat{\varphi}(x, t) = \begin{cases} \sqrt{3} \cdot \frac{x}{t} & , \quad 0 \leq x \leq t \\ \sqrt{3} \cdot \frac{1-x}{1-t} & , \quad t \leq x \leq 1 \end{cases} \quad \text{für } 0 < t < 1 \quad ,$$



ferner

$$\hat{\varphi}(x, 0) = \sqrt{3} \cdot (1 - x), \quad \hat{\varphi}(x, 1) = \sqrt{3} \cdot x.$$

Man entnimmt der Figur, daß hier das $\hat{\varphi}(x, t)$ bei festem x mit zunehmendem t abnimmt, falls $x < t$, und mit zunehmendem t zunimmt, falls $t < x$. Das läßt sich allgemein zeigen; man muß dazu beweisen, daß

$$(1) \quad \frac{\partial}{\partial t} \hat{\varphi}(x, t) \begin{cases} < 0 & \text{falls } t > x, \\ > 0 & \text{falls } t < x. \end{cases}$$

Nun ist

$$(2) \quad \frac{\partial}{\partial t} \hat{\varphi}(x, t) = -\hat{\varphi}(x, t) \cdot \begin{cases} \frac{(K(t) g(0, t))'}{K(t) g(0, t)}, & t > x \\ \frac{(K(t) g(1, t))'}{K(t) g(1, t)}, & t < x. \end{cases}$$

Beachtet man die Normierung der $\hat{\varphi}$ sowie Satz 3 (b), dann ergibt eine einfache Zwischenrechnung

$$(3) \quad \frac{(K(t) g(0, t))'}{K(t) g(0, t)} = \frac{-g(0, 1) W(t)}{g(0, t) g(1, t)} \cdot \int_t^1 \hat{\varphi}^2(x, t) dx > 0,$$

$$(3') \quad \frac{(K(t) g(1, t))'}{K(t) g(1, t)} = \frac{g(0, 1) W(t)}{g(0, t) g(1, t)} \cdot \int_0^t \hat{\varphi}^2(x, t) dx < 0.$$

Die Gln. (2), (3), (3'), zusammen mit Satz 33, liefern dann die Behauptung (1), in Worten:

Satz 34 : Bei festem x ist die Knickfunktion $\hat{\varphi}(x, t)$ für $t < x$ eine monoton zunehmende, für $t > x$ eine monoton abnehmende Funktion von t .

§ 2 : Beschreibung des Verlaufs ek. Funktionen durch den Verlauf der $\hat{\varphi}(x, t)$.

Nun zeichnen sich die $\hat{\varphi}$ unter anderem dadurch vor den übrigen nicht negativen, normierten ek. Funktionen aus, daß man sich durch ihren Verlauf von dem Verlauf der übrigen ein Bild machen kann. Das soll in den nächsten Sätzen gezeigt werden.

Unter Benutzung von Def.9 gewinnt man aus der Schreibweise (VII,12) für $\varphi(x)$ die folgende:

$$(4) \quad \varphi(x) = K(0) \cdot m_{\varphi}(0, x) \cdot \hat{\varphi}(x, 0) + K(1) \cdot m_{\varphi}(1, x) \cdot \hat{\varphi}(x, 1);$$

entsprechend kann man die in $x = \xi$ ($0 < \xi < 1$) an $\varphi(x)$ gelegte Stützfunktion (VII,15) auch so schreiben:

$$(5) \quad \sigma_{\xi}(x) = K(0) \cdot m_{\varphi}(0, \xi) \cdot \hat{\varphi}(x, 0) + K(1) \cdot m_{\varphi}(1, \xi) \cdot \hat{\varphi}(x, 1).$$

Für nicht negative ek. $\varphi(x)$ ist

$$m_{\varphi}(x_0, x) \geq 0 \quad (\text{Satz 24}), \quad 0 \leq \varphi(x) \leq \sigma_{\xi}(x) \quad (\text{Satz 12}).$$

Beachtet man das, und setzt man überdies $\varphi(x)$ als normiert voraus, dann folgt aus (5)

$$(6) \quad 1 \leq K(0) m_{\varphi}(0, \xi) + K(1) m_{\varphi}(1, \xi) \quad \text{für } 0 < \xi < 1.$$

Einsetzen von (6) in (4) liefert

$$(7) \quad \varphi(x) \geq \begin{cases} \hat{\varphi}(x, 1) + K(0) m_{\varphi}(0, x) [\hat{\varphi}(x, 0) - \hat{\varphi}(x, 1)] \\ \hat{\varphi}(x, 0) - K(1) m_{\varphi}(1, x) [\hat{\varphi}(x, 0) - \hat{\varphi}(x, 1)] \end{cases}.$$

Nun ist nach früheren Feststellungen (Abschnitt III) über Lösungen von $L\langle y \rangle = 0$ klar, daß $\hat{\varphi}(x, 0)$ und $\hat{\varphi}(x, 1)$ genau einen Punkt gemeinsam haben - etwa in $x = t_0$, mit $0 < t_0 < 1$ -, so daß

$$\hat{\varphi}(x, 0) - \hat{\varphi}(x, 1) \begin{cases} > 0 \text{ für } 0 \leq x < t_0, \\ < 0 \text{ für } t_0 < x \leq 1. \end{cases}$$

Somit folgt aus (7)

Satz 35: $\varphi(x)$ sei nicht negativ, normiert und ek. auf $\langle 0, 1 \rangle$; t_0 sei der im Innern von $\langle 0, 1 \rangle$ gelegene Schnitt von $\hat{\varphi}(x, 0)$ und $\hat{\varphi}(x, 1)$. Dann gilt

$$\varphi(x) \geq \begin{cases} \hat{\varphi}(x, 1) & \text{für } 0 \leq x < t_0, \\ \hat{\varphi}(x, 0) & \text{für } t_0 < x \leq 1. \end{cases}$$

Da $\hat{\varphi}(x, 0)$, $\hat{\varphi}(x, 1)$ nur am Rande von $\langle 0, 1 \rangle$ verschwinden, erkennt man überdies, daß auch $\varphi(x)$ höchstens am Rande von $\langle 0, 1 \rangle$ verschwinden kann.

Damit ist das Gebiet, in dem die nicht negativen, normierten ek. Funktionen verlaufen, nach unten abgegrenzt; die Abgrenzung nach oben erfolgt durch

Satz 36: $\varphi(x)$ sei nicht negativ, normiert und ek. auf $\langle 0, 1 \rangle$; dann ist für $0 \leq x \leq 1$

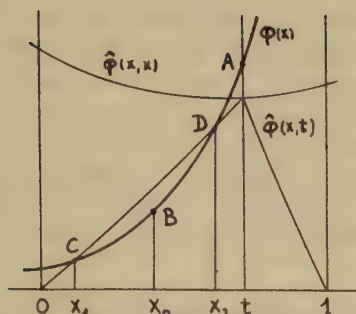
$$\varphi(x) \leq \hat{\varphi}(x, x) = \frac{1}{K(x)}.$$

Bew.: Der Beweis könnte in wenigen Zeilen rechnerisch erfolgen; wir ziehen den anschaulich-geometrischen Weg vor.

Angenommen, in $x = t$ wäre

$$\varphi(t) > \hat{\varphi}(t, t),$$

d.h. $\varphi(x)$ ginge durch $A:(t, \varphi(t))$. Es möge zunächst $0 < t < 1$ sein.



Nach diesen Annahmen ist die Figur gezeichnet. – Dann muß es wegen der Normierung von $\varphi(x)$ und von $\hat{\varphi}(x, t)$ einen Punkt $B: (x_0, \varphi(x_0))$ von φ geben, der unterhalb von $\hat{\varphi}(x, t)$ liegt. Dieser Punkt kann nicht die Abszisse $x_0 = 0$ oder $x_0 = 1$ haben, da $\hat{\varphi}(0, t) = \hat{\varphi}(1, t) = 0$ und $\varphi(x) \geq 0$. O.B.d.A. sei $0 < x_0 < t$. Weil $\varphi(x)$, $\hat{\varphi}(x, t)$ stetig sind, müßten diese beiden Funk-

tionen mindestens zwei Punkte gemeinsam haben, etwa C und D, so daß $0 \leq x_1 < x_0 < x_2 < t$. Für x aus $\langle x_1, x_2 \rangle$ ist aber $\hat{\varphi}(x, t)$ Lösung von $L\langle y \rangle = 0$, und es müßte nach Satz 4 $\varphi(x) \geq \hat{\varphi}(x, t)$ sein. Einen Punkt B der beschriebenen Art kann es nicht geben. Das ist der erwünschte Widerspruch. Sollte $t = 0$ oder $t = 1$ sein, kann man ähnlich argumentieren oder auch (unter Benutzung der Stetigkeit) den Fall auf den bereits behandelten zurückführen.

Über die Werte $\varphi(0), \varphi(1)$ nicht negativer, normierter ek. Funktionen $\varphi(x)$ kann man noch nähere Aussagen machen. – Man wähle zwei nicht negative Zahlen y_0, y_1 und bilde die ek. Funktion

$$y(x) = y_0 \frac{g(1, x)}{g(1, 0)} + y_1 \frac{g(0, x)}{g(0, 1)}.$$

Nach Satz 1 ist $y(x) \geq 0$ für $0 \leq x \leq 1$; ferner gilt $y(0) = y_0$, $y(1) = y_1$. Wir erlegen nun den Zahlen y_0, y_1 die Zusatzbedingung auf, daß $y(x)$ normiert sein soll. Das heißt (vgl. Def. 8)

$$(8) \quad 1 = y_0^2 \cdot K^2(0) + y_1^2 \cdot K^2(1) + 2 \cdot y_0 y_1 \cdot \int_0^1 \frac{g(0, x) g(1, x)}{g(0, 1) g(1, x)} dx.$$

Hier ist

$$K_{01} = \int_0^1 \frac{g(0, x) g(1, x)}{g(0, 1) g(1, 0)} dx > 0,$$

und eine einfache Diskriminantenbetrachtung lehrt, daß es wirklich nicht negative Zahlen y_0, y_1 gibt, die (8) erfüllen. Differenziert man (8) nach y_0 :

$$\frac{dy_1}{dy_0} = - \frac{y_0 K^2(0) + y_1 K_{01}}{y_1 K^2(1) + y_0 K_{01}},$$

so erkennt man die naheliegende Tatsache, daß y_1 abnimmt, wenn y_0 zunimmt, und umgekehrt. y_1 erreicht das Maximum, wenn $y_0 = 0$, also

$$\max(y_1) = \frac{1}{K(1)}, \quad \max(y_0) = \frac{1}{K(0)}.$$

Jetzt sei $\varphi(x)$ nicht negativ, normiert und ek., und zwar sei $\varphi(0) \geq y_0$. Die Behauptung ist, daß dann $\varphi(1) \leq y_1$. - Zum Beweise dessen nehmen wir an, es sei $\varphi(1) > y_1$, und bilden nach (II,1) die Lösung von $L\langle y \rangle = 0$ durch $(0, \varphi(0))$ und $(1, \varphi(1))$. Man findet für $0 < x \leq 1$ nach Satz 4

$$\varphi(x) \geq \varphi(0) \frac{g(1,x)}{g(1,0)} + \varphi(1) \frac{g(0,x)}{g(0,1)} > y(x) = y_0 \frac{g(1,x)}{g(1,0)} + y_1 \frac{g(0,x)}{g(0,1)} \geq 0.$$

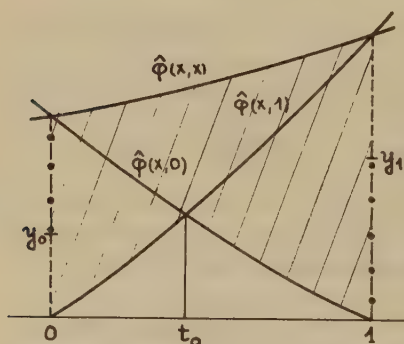
Quadratur und Integration dieses Ausdrucks liefert den gewünschten Widerspruch. Somit ist gewonnen

Satz 37 : Es seien y_0, y_1 zwei nicht negative, durch Gl.(8) verbundene Zahlen; $\varphi(x)$ sei nicht negativ, normiert und ek. auf $\langle 0,1 \rangle$.

Ist dann $\varphi(0) \geq y_0$, so folgt $\varphi(1) \leq y_1$, und ist $\varphi(1) \geq y_1$, so folgt $\varphi(0) \leq y_0$.

Ferner ist

$$\frac{dy_1}{dy_0} < 0, \quad \frac{dy_0}{dy_1} < 0.$$



Diese Figur stellt den Inhalt der Sätze 35, 36, 37 anschaulich dar:

Auf $\langle 0,1 \rangle$ nicht negative, normierte und ek. Funktionen $\varphi(x)$ müssen in dem schraffierten Gebiet verlaufen. Liegt bei einer solchen Funktion $(0, \varphi(0))$ auf der linken Strecke ---, so liegt $(1, \varphi(1))$ auf der rechten Strecke ---. Liegt $(1, \varphi(1))$ auf der Strecke ----- rechts, so

liegt $(0, \varphi(0))$ auf der Strecke ----- links. Dabei sind y_0, y_1 durch Gl.(8) verknüpft.

Durch den folgenden Satz möge die Sonderstellung der $\hat{\varphi}(x, t)$ noch einmal deutlich werden:

Satz 38 : Ist $\varphi(x)$ nicht negativ, normiert und ek. auf $\langle 0,1 \rangle$, so gilt für $0 < x < 1$:

$$0 \leq \varphi'_-(x) - \varphi'_+(x) \leq \hat{\varphi}'_{x-}(x, x) - \hat{\varphi}'_{x+}(x, x).$$

Den Beweis unterdrücken wir; er ergibt sich leicht aus der gegenteiligen Annahme unter Benutzung von Satz 36.

IX. Integraldarstellungen

ek. Funktionen.

Auch hier wird - meist ohne besonderen Hinweis - vorausgesetzt, daß J das abgeschlossene Intervall $\langle 0,1 \rangle$ sei.

§ 1 : Integraldarstellung vermittelt der Funktion $\mu_\varphi(t)$.

Zunächst geben wir eine Integraldarstellung an, die in anderem Zusammenhang und unter anderen Voraussetzungen bereits im Beweis von Satz 25 als Gl.(9) gefunden wurde.

Satz 39 : $w(x)$ sei die nach Def.1 existierende, stets positive Lösung von $L\langle y \rangle = C$.

Ist $\varphi(x)$ ek., so gilt für $0 < x < 1$ die Darstellung

$$\varphi(x) = w(x) \left[\frac{\varphi(a)}{w(a)} + \int_a^x \frac{W(t)}{w^2(t)} \mu_\varphi(t) dt \right].$$

Darin ist a eine bis auf die Bedingung $0 < a < 1$ beliebige reelle Zahl, und $\mu_\varphi(t)$ die in Satz 25 als monoton erkannte, für $0 < t < 1$ erklärte Funktion

$$(1) \quad \mu_\varphi(t) = \frac{1}{W(t)} \cdot \left| \frac{w(t)}{w'(t)} \varphi(t) \right|.$$

Umgekehrt stellt

$$\varphi(x) = w(x) \left[A + \int_a^x \frac{W(t)}{w^2(t)} \mu(t) dt \right] \quad \text{für } 0 < x < 1,$$

$$\varphi(0) = \lim_{x \rightarrow 0+0} \varphi(x), \quad \varphi(1) = \lim_{x \rightarrow 1-0} \varphi(x)$$

eine ek. Funktion dar, wenn $\mu(t)$ eine für $0 < t < 1$ erklärte, monoton zunehmende Funktion derart ist, daß die angegebenen Grenzwerte existieren, und wenn A eine völlig beliebige, a eine bis auf die Bedingung $0 < a < 1$ beliebige reelle Zahl ist.

Bew.: $\varphi(x)$ sei ek.. Integriert man (VII,7) zwischen a und x , wo $0 < x < 1$, so ergibt Satz 26 ($\varphi' = \frac{1}{w(x)}$ gesetzt) für die linke Seite den Ausdruck

$$\frac{\varphi(x)}{w(x)} - \frac{\varphi(a)}{w(a)},$$

und daraus folgt die Behauptung.

Ist umgekehrt $\mu(t)$ monoton nicht zunehmend, dann besteht der Beweis aus einer Betrachtung, die mit der unterhalb Gl.(VII,9) geführten fast wörtlich übereinstimmt, worauf hier verwiesen sei.

Die Bedeutung dieser Integraldarstellung liegt darin, daß man jetzt alle ek. Funktionen angeben kann. Wählt man für $\mu(t)$ als Spezialfall einer monoton nicht zunehmenden Funktion eine Konstante, so erhält man als $\varphi(x)$ eine Lösung von $L\langle y \rangle = 0$; dies folgt sofort aus (VII,10).

§ 2 : Integraldarstellung vermittels der Knickfunktionen $\hat{\varphi}(x,t)$.

Wichtiger ist eine andere Art der Integraldarstellung, bei der die $\hat{\varphi}$ benutzt werden und deren Möglichkeit von Blaschke und Pick ⁶⁾ für konvexe Funktionen nachgewiesen und für ek. Funktionen behauptet worden ist. Dem Beweis dieser Behauptung wenden wir uns zu und tun den ersten Schritt in dieser Richtung mit

Satz 40 A : $L\langle y \rangle$ sei auf $\langle 0,1 \rangle$ erklärt. Durch Linearkombination der aus $L\langle y \rangle$ gebildeten $\hat{\varphi}(x,t)$ entsteht bei positiven Koeffizienten eine nicht negative, auf $\langle 0,1 \rangle$ ek. Funktion, die abschnittsweise aus Lösungen von $L\langle y \rangle = 0$ besteht.

Umgekehrt kann jede nicht negative, auf $\langle 0,1 \rangle$ ek. Funktion, die abschnittsweise aus Lösungen von $L\langle y \rangle = 0$ besteht, durch eine Linearkombination der $\hat{\varphi}(x,t)$ mit positiven Koeffizienten dargestellt werden.

Bew.: Vorgelegt sei

$$\varphi(x) = \sum_{j=0}^{n+1} c_j \hat{\varphi}(x, t_j)$$

mit $c_j > 0$ und $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < t_{n+1} = 1$.

Nach Satz 33 ist dann $\varphi(x) \geq 0$, und es gilt

$$D\varphi(x_1, x_2, x_3) = \sum_{j=0}^{n+1} c_j \cdot D\hat{\varphi}(x, t_j)(x_1, x_2, x_3) .$$

Für $0 \leq x_1 < x_2 < x_3 \leq 1$ ist dies nicht positiv, da die $\hat{\varphi}(x, t_j)$ ek. sind. Also ist auch $\varphi(x)$ ek.. Außerdem besteht in $\langle t_j, t_{j+1} \rangle$ das $\varphi(x)$ offenbar aus einer Linearkombination von $g(0,x)$ und $g(1,x)$: $\varphi(x)$ besteht abschnittsweise aus Lösungen von $L\langle y \rangle = 0$.

Zum Beweise des zweiten Teiles des Satzes werde vorausgesetzt, daß eine nicht negative, auf $\langle 0,1 \rangle$ ek. Funktion $\varphi(x)$ abschnittsweise aus Lösungen von $L\langle y \rangle = 0$ besteht; die Abschnitte seien durch eine Zerlegung $\mathfrak{Z}$ von $\langle 0,1 \rangle$ der obigen Art gegeben.

Dann ist

$$(2) \quad \varphi(x) = a_k \frac{g(1, x)}{g(1, 0)} + b_k \frac{g(0, x)}{g(0, 1)},$$

x aus $\langle t_k, t_{k+1} \rangle$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$; a_k, b_k sind Konstante.

Durch $\mathcal{Z}$ und durch die a_k, b_k ist $\varphi(x)$ eindeutig bestimmt. Offenbar ist aber $\varphi(x)$ auch durch $\mathcal{Z}$, durch a_0, b_n und durch

$$\Delta a_k = a_k - a_{k-1}, \quad \Delta b_k = b_k - b_{k-1} \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

eindeutig bestimmt. Die letztgenannten Bestimmungsstücke rechnen wir aus. - Zunächst findet man aus (2)

$$(3) \quad a_0 = \varphi(0), \quad b_n = \varphi(1).$$

Die Stetigkeit von $\varphi(x)$ (Satz 7 und Gl. (VII, 1)) erfordert nach (2)

$$(4) \quad \Delta a_k \frac{g(1, t_k)}{g(1, 0)} + \Delta b_k \frac{g(0, t_k)}{g(0, 1)} = 0 \quad (k=1, 2, \dots, n).$$

Setzt man

$$\Delta \varphi'_k = \varphi'_+(t_k) - \varphi'_-(t_k),$$

so findet man entsprechend

$$(4') \quad \Delta a_k \frac{g'(1, t_k)}{g(1, 0)} + \Delta b_k \frac{g'(0, t_k)}{g(0, 1)} = \Delta \varphi'_k, \quad (k=1, 2, \dots, n),$$

und es muß nach Satz 10, wenn in t_k wirklich ein Übergang von einer Lösung von $L\langle y \rangle = 0$ zu einer anderen stattfinden soll,

$$(5) \quad \Delta \varphi'_k < 0$$

sein. Aus (4), (4') findet man mit Satz 3 (b)

$$(6) \quad \Delta a_k = -\frac{g(0, t_k)}{W(t_k)} \Delta \varphi'_k, \quad \Delta b_k = -\frac{g(1, t_k)}{W(t_k)} \Delta \varphi'_k, \quad (k=1, 2, \dots, n).$$

Durch $\mathcal{Z}$, (3) und (6) ist also $\varphi(x)$ eindeutig bestimmt. Wir bilden nun

$$(7) \quad \psi(x) = \sum_{j=0}^{n+1} c_j \hat{\varphi}(x, t_j)$$

und versuchen, die c_j so zu bestimmen, daß stets $\varphi(x) = \psi(x)$. Statt

(7) kann man mit Def. 9 schreiben

$$(7') \quad \psi(x) = \left[\sum_{j=0}^k \frac{c_j}{K(t_j)g(1, t_j)} \right] \cdot g(1, x) + \left[\sum_{j=k+1}^{n+1} \frac{c_j}{K(t_j)g(0, t_j)} \right] \cdot g(0, x)$$

für x aus $\langle t_k, t_{k+1} \rangle$ und $k=0, 1, 2, \dots, n$.

Setzt man entsprechend (2)

$$(7'') \quad \psi(x) = \alpha_k \frac{g(1, x)}{g(1, 0)} + \beta_k \frac{g(0, x)}{g(0, 1)} \quad \text{für } x \text{ aus } \langle t_k, t_{k+1} \rangle,$$

dann liefert der Vergleich von (7') und (7'')

$$\alpha_k = g(1, 0) \sum_{j=0}^k \frac{c_j}{K(t_j)g(1, t_j)}, \quad \beta_k = g(0, 1) \sum_{j=k+1}^{n+1} \frac{c_j}{K(t_j)g(0, t_j)}$$

und somit - analog den obigen Überlegungen - als Bestimmungsstücke von $\psi(x)$

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_0 = \frac{c_0}{K(0)}, \quad \beta_n = \frac{c_{n+1}}{K(1)}; \\ \Delta \alpha_k = \frac{g(1,0)}{K(t_k)g(1,t_k)} c_k, \quad \Delta \beta_k = \frac{-g(0,1)}{K(t_k)g(0,t_k)} c_k. \\ (k=1,2,3,\dots,n) \end{array} \right.$$

Wenn man gezeigt hat, daß durch nicht negative Wahl geeigneter c_k ($k=0,1,2,\dots,n,n+1$) die Bestimmungsstücke (8) von $\psi(x)$ mit den entsprechenden Bestimmungsstücken (3) und (6) von $\varphi(x)$ identifiziert werden können, ist der Beweis erbracht..

Nun ist offenbar

$$\alpha_0 = a_0 \quad ; \quad \beta_n = b_n \quad ,$$

wenn man

$$(9) \quad c_0 = K(0) \varphi(0) \quad ; \quad c_{n+1} = K(1) \varphi(1)$$

wählt; und für $k=1,2,\dots,n$ ist offenbar

$$\Delta \alpha_k = \Delta a_k \quad ; \quad \Delta \beta_k = \Delta b_k \quad ,$$

wenn man

$$(9') \quad c_k = \frac{K(t_k)g(0,t_k)g(1,t_k)}{W(t_k)g(0,1)} \cdot \Delta \varphi'_k$$

wählt. Nach Voraussetzung und nach Satz 32 sind c_0, c_{n+1} nicht negativ, nach Satz 1, Satz 32 und wegen Gl.(5) sind $c_1, c_2, \dots, c_n$ positiv. - Damit ist der Satz bewiesen.

Man möchte aber mehr haben, d.h. insbesondere von der Voraussetzung loskommen, daß die darzustellende Funktion $\varphi(x)$ abschnittsweise aus Lösungen von $L\langle y \rangle = 0$ besteht. Approximiert man $\varphi(x)$ durch das $P_\sigma(x)$ von Satz 29 und stellt man $P_\sigma(x)$ durch Satz 40A dar, so kommt man zu der Vermutung der Richtigkeit von

Satz 40 B :

$$\varphi(x) = \int_0^1 \hat{\varphi}(x,t) f(t) dt$$

ist eine nicht negative, auf $\langle 0,1 \rangle$ ek. Funktion mit $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ wenn $L\langle y \rangle$ und $f(t)$ auf $\langle 0,1 \rangle$ erklärt sind und $f(t)$ nicht negativ und im Riemannschen Sinne integrierbar ist.

Umgekehrt kann jede nicht negative, auf $\langle 0,1 \rangle$ ek. differenzierbare Funktion $\varphi(x)$ mit $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ derart, daß auch noch $(p(x) \varphi'(x))'$ existiert und integrierbar ist, in der Form

$$\varphi(x) = \int_0^1 \hat{\varphi}(x,t) f_\varphi(t) dt$$

dargestellt werden, wobei

$$f_\varphi(t) = \frac{K(t)g(1,t)g(0,t)}{g(0,1)W(t)p(t)} \cdot L\langle \varphi(t) \rangle$$

nicht negativ und im Riemannschen Sinne integrierbar ist.

Sieht man den Satz einen Augenblick als bewiesen an, und versucht man, eine Lösung von $L\langle y \rangle = 0$ darzustellen, so wird man auf $f_\varphi(t) \equiv 0$ und $\varphi(x) \equiv 0$ geführt. Das entspricht der Tatsache, daß es keine nicht-triviale, in $x = 0$ und $x = 1$ verschwindende Lösung von $L\langle y \rangle = 0$ gibt (vgl. Beweis von Satz 1).

Es folgt der Beweis des behaupteten Satzes.

1. Es genüge $f(t)$ den Voraussetzungen der ersten Aussage. Satz 33 liefert die Integrierbarkeit von $\hat{\varphi}(x, t)$ bezüglich t für jedes x ; also gibt es das $\varphi(x)$ erklärende Integral für x aus $\langle 0, 1 \rangle$. Ebenfalls aus Satz 33 folgt $\varphi(x) \geq 0$ und insbesondere auch $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$. Ferner ist bei $0 \leq x_1 < x_2 < x_3 \leq 1$

$$D_\varphi(x_1, x_2, x_3) = \int_0^1 f(t) \cdot D_{\hat{\varphi}(x, t)}(x_1, x_2, x_3) dt \leq 0,$$

da $\hat{\varphi}(x, t)$ ek. und $f(t) \geq 0$ ist. Daher ist auch $\varphi(x)$ ek..

2. Daß unter den getroffenen Voraussetzungen $f_\varphi(t)$ nicht negativ und integrierbar ist, ist klar. Es gibt auch

$$\psi(x) = \int_0^1 \hat{\varphi}(x, t) f_\varphi(t) dt.$$

Zu zeigen ist, daß $\psi(x) = \varphi(x)$ für x aus $\langle 0, 1 \rangle$. Man erkennt wie unter 1., daß $\psi(0) = 0 = \varphi(0)$, $\psi(1) = 0 = \varphi(1)$. Es sei daher $0 < x < 1$. Schreibt man g für $g(0, 1) \cdot W(t) \cdot p(t) = \text{const}$, dann erhält man

$$g\psi(x) = g(1, x) \int_0^x g(0, t) \cdot L\langle \varphi(t) \rangle dt + g(0, x) \int_x^1 g(1, t) \cdot L\langle \varphi(t) \rangle dt.$$

Diese Integrale werden nach der Lagrangeschen Identität (VI, 1) ausgewertet, was unter Beachtung von $L\langle g(t_0, t) \rangle = 0$ nach leichter Rechnung auf

$$g\psi(x) = g\varphi(x)$$

führt, womit der in Rede stehende Satz bewiesen ist.

Auch damit ist man noch nicht zufrieden. Man möchte freikommen von den zusätzlichen Differenzierbarkeits-Forderungen an die darzustellende Funktion $\varphi(x)$. - Schreibt man die eben gewonnene Integraldarstellung ausführlich hin und eliminiert $L\langle \varphi(t) \rangle$ mit Hilfe von (VII, 7'), so erhält man unter Beachtung von $p \cdot W = \text{const}$

$$\varphi(x) = \int_0^1 \hat{\varphi}(x, t) \frac{k(t) g(1, t) g(0, t)}{g(0, 1) w(t)} \mu'_\varphi(t) dt.$$

Der Faktor $\mu'_\varphi(t) dt$ legt die Vermutung nahe, daß man von der Voraussetzung, $(p(x) \cdot \varphi'(x))'$ (und damit $L\langle \varphi \rangle$ und $\mu'_\varphi(t)$) solle existieren, freikommen kann durch Übergang zu einem Stieltjes-Integral. (Diese Methode wurde schon verwendet beim Übergang von (VII, 14') zu Satz 28.) In der Tat läßt sich beweisen

Satz 40 C : Es sei $L \langle y \rangle$ auf $\langle 0,1 \rangle$ erklärt; daraus werden die $\hat{\phi}(x,t)$ gebildet. Dann stellt das Stieltjes-Integral

$$\varphi(x) = \int_0^1 \hat{\phi}(x,t) d\Phi(t)$$

eine nicht negative, für $x = 0$ und $x = 1$ verschwindende, auf $\langle 0,1 \rangle$ ek. Funktion dar, wenn $\Phi(t)$ eine für $0 \leq t \leq 1$ erklärte, monoton nicht abnehmende und für $t = 0$ bzw. $t = 1$ rechts- bzw. linksseitig stetige Funktion ist.

Umgekehrt kann jede nicht negative, für $x = 0$ und $x = 1$ verschwindende, auf $\langle 0,1 \rangle$ ek. Funktion $\varphi(x)$ durch ein Stieltjes-Integral dargestellt werden:

$$\varphi(x) = \int_0^1 \hat{\phi}(x,t) d\Phi(t) ,$$

wobei (mit $0 < a < 1$)

$$\Phi(t) = \int_a^t \frac{\kappa(\tau)g(1,\tau)g(0,\tau)}{g(0,1)w(\tau)} d\mu_{\varphi}(\tau) \quad \text{für } 0 < t < 1 ,$$

$$\Phi(0) = \lim_{t \rightarrow 0+0} \Phi(t) , \quad \Phi(1) = \lim_{t \rightarrow 1-0} \Phi(t)$$

eine für $0 \leq t \leq 1$ erklärte, monoton nicht abnehmende Funktion ist. $w(\tau)$ ist die nach Def.1 existierende, stets positive Lösung von $L \langle y \rangle = 0$.

Bew.: $\Phi(t)$ genüge den Voraussetzungen der ersten Aussage. Nach Satz 33 (b) ist der Integrand $\hat{\phi}(x,t)$ für alle x als Funktion von t im Innern von $\langle 0,1 \rangle$ stetig, am Rande beschränkt. Die volle Aussage der Stieltjes-Regel a (Anhang) liefert die Existenz des $\varphi(x)$ darstellenden Integrals. Die Stieltjes-Regel b ergibt $\varphi(x) \geq 0$; ferner folgt aus Def.9 und Stieltjes-Regel e leicht, daß $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$. Endlich ist für $0 \leq x_1 < x_2 < x_3 \leq 1$

$$D_{\varphi}(x_1, x_2, x_3) = \int_0^1 D_{\hat{\phi}(x,t)}(x_1, x_2, x_3) d\Phi(t) ,$$

und dies ist ≤ 0 , nach Stieltjes-Regel b und weil die $\hat{\phi}(x,t)$ ek. sind. Also ist auch $\varphi(x)$ ek..

Sodann genüge $\varphi(x)$ den Voraussetzungen der zweiten Aussage. Daß dann $\Phi(t)$ für $0 < t < 1$ existiert und daß es

$$\lim_{t \rightarrow 0+0} \Phi(t) , \quad \lim_{t \rightarrow 1-0} \Phi(t)$$

gibt, erkennt man, wenn man sich noch einmal Satz 28 und den Anfang seines Beweises vergegenwärtigt und Stieltjes-Regel e beachtet. Mit Satz 25 folgt aus der Stieltjes-Regel b, daß $\Phi(t)$ monoton nicht abnimmt. Dieses $\Phi(t)$ hat also dieselben Eigenschaften wie das oben betrachtete; es gibt

$$\psi(x) = \int_0^1 \hat{\varphi}(x, t) d\phi(t) \quad \text{für } 0 \leq x \leq 1.$$

Wie oben folgt auch hier: $\psi(0) = 0 = \varphi(0)$, $\psi(1) = 0 = \varphi(1)$.
Es sei daher $0 < x < 1$. Nach Def. 9 hat man ausführlich

$$(10) \quad \psi(x) = g(1, x) \int_0^x \frac{d\phi(t)}{K(t)g(1, t)} + g(0, x) \int_x^1 \frac{d\phi(t)}{K(t)g(0, t)}.$$

Für $\phi(t)$ erhält man aus Satz 28 mit Stieltjes-Regel c

$$\phi(t) = \frac{-1}{g(0, 1)} \cdot \begin{cases} \int_0^t K(\tau) \cdot g(1, \tau) \cdot d\mathfrak{m}_{\varphi}(0, \tau) & \text{für } 0 \leq t < 1 \\ \int_t^1 K(\tau) \cdot g(0, \tau) \cdot d\mathfrak{m}_{\varphi}(1, \tau) & \text{für } 0 < t \leq 1. \end{cases}$$

Damit folgt aus (10)

$$\psi(x) = \frac{-1}{g(0, 1)} \cdot \left\{ g(1, x) \cdot [\mathfrak{m}(0, t)]_0^x + g(0, x) \cdot [\mathfrak{m}(1, t)]_x^1 \right\},$$

und aus Def. 7a und wegen $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$:

$$\psi(x) = \mathfrak{m}_{\varphi}(0, x) \frac{g(1, x)}{g(1, 0)} + \mathfrak{m}_{\varphi}(1, x) \frac{g(0, x)}{g(0, 1)}.$$

Das ist aber wegen (VII, 12) die Behauptung.

In einem letzten Schritt endlich fällt die noch verbliebene Zusatzvoraussetzung, daß die darzustellende Funktion am Rande von $\langle 0, 1 \rangle$ verschwindet; in voller Allgemeinheit läßt sich zeigen

Satz 40 D: Jede nicht negative, auf $\langle 0, 1 \rangle$ ek. Funktion $\varphi(x)$ kann für $0 < x < 1$ durch ein Stieltjes-Integral dargestellt werden:

$$\varphi(x) = \int_0^1 \hat{\varphi}(x, t) d\phi(t).$$

Dabei ist $\phi(t)$ die im folgenden Beweis erklärte, monoton nicht abnehmende Funktion.

Bew.: Man kann zeigen, daß sich das von Blaschke und Pick ⁶⁾ angegebene Verfahren zum Beweis des entsprechenden Satzes für konvexe Funktionen auf den Fall ek. Funktionen übertragen läßt. Dabei approximiert man $\varphi(x)$ durch eine Folge leicht (mit Satz 23) als ek. nachzuweisender Funktionen:

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \varphi(\alpha_n) \frac{g(0, x)}{g(0, \alpha_n)} & \text{für } 0 \leq x \leq \alpha_n \\ \varphi(x) & \text{für } \alpha_n \leq x \leq \beta_n \\ \varphi(\beta_n) \frac{g(1, x)}{g(1, \beta_n)} & \text{für } \beta_n \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Hierin ist (α_n) ($n=1, 2, 3, \dots$) irgend eine monoton abnehmende,

gegen 0 und (β_n) eine monoton zunehmende, gegen 1 konvergierende Folge; außerdem ist $0 < \alpha_n < \beta_n < 1$.

Da $\varphi_n(0) = \varphi_n(1) = 0$, fallen die $\varphi_n(x)$ unter die Voraussetzungen von Satz 40 C; für sie gibt es bereits eine Integraldarstellung. In dieser kann man $n \rightarrow \infty$ rücken lassen, und man erhält eine Integraldarstellung von $\varphi(x)$ für $0 < x < 1$, die wie bei Blaschke und Pick auch im Falle ek. Funktionen für $x = 0$ und $x = 1$ versagt.

Jedenfalls führt dieses Beweisverfahren auf unbequeme Formeln. Das folgende ist wesentlich kürzer, es geht auf H. Noll ⁷⁾ zurück.

Nach Satz 4a läßt sich $\varphi(x)$ als Summe von zwei nicht negativen ek. Funktionen darstellen:

$$(11) \quad \varphi(x) = h(x) + s(x),$$

wo $h(0) = h(1) = 0$ und (mit Def. 9)

$$(12) \quad s(x) = K(0) \varphi(0) \hat{\varphi}(x, 0) + K(1) \varphi(1) \hat{\varphi}(x, 1).$$

Nach Satz 40 C kann man bereits $h(x)$ darstellen:

$$(13) \quad h(x) = \int_0^1 \hat{\varphi}(x, t) dH(t),$$

wo $H(t)$ monoton nicht abnimmt, so daß, falls

$$(14) \quad S(t) = \begin{cases} -K(0) \varphi(0) & \text{für } t = 0 \\ 0 & \text{für } 0 < t < 1 \\ +K(1) \varphi(1) & \text{für } t = 1 \end{cases}$$

gesetzt wird, auch

$$(15) \quad \phi(t) = H(t) + S(t)$$

monoton nicht abnimmt. Dann liefert Stieltjes-Regel a mit Satz 33 die Existenz von

$$(16) \quad \sigma(x) = \int_0^1 \hat{\varphi}(x, t) dS(t)$$

für $0 < x < 1$. Wählt man ε mit $0 < \varepsilon < 0,5$, dann ist

$$\sigma(x) = \int_0^\varepsilon \hat{\varphi}(x, t) dS(t) + \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} \hat{\varphi}(x, t) dS(t) + \int_{1-\varepsilon}^1 \hat{\varphi}(x, t) dS(t).$$

Wegen (14) ergibt Stieltjes-Regel f

$$\sigma(x) = K(0) \varphi(0) \hat{\varphi}(x, \tau_0) + K(1) \varphi(1) \hat{\varphi}(x, \tau_1) \\ \text{mit } 0 < \tau_0 < \varepsilon, \quad 1 - \varepsilon < \tau_1 < 1.$$

Man darf $\varepsilon \rightarrow 0$ rücken lassen und erhält nach (12)

$$\sigma(x) = s(x) \text{ für } 0 < x < 1.$$

Damit folgt aber aus (11), (13), (16) für diese x

$$\varphi(x) = \int_0^1 \hat{\varphi}(x, t) dH(t) + \int_0^1 \hat{\varphi}(x, t) dS(t).$$

Dafür kann man aber mit (15) schreiben

$$\varphi(x) = \int_0^1 \hat{\varphi}(x, t) d\phi(t),$$

womit der in Rede stehende Satz schon bewiesen ist.

Für $x = 0$, $x = 1$ versagt diese Integraldarstellung im allgemeinen, da es wegen der Unstetigkeit von $\hat{\varphi}(0, t)$ bzw. von $\hat{\varphi}(1, t)$ für $t = 0$ bzw. $t = 1$ das Stieltjes-Integral

$$\int_0^1 \hat{\varphi}(0, t) d\phi(t) \quad \text{bzw.} \quad \int_0^1 \hat{\varphi}(1, t) d\phi(t)$$

schon dann nicht gibt, wenn $\phi(t)$ für $t = 0$ bzw. $t = 1$ unstetig ist (Stieltjes-Regel a). Da aber nach Satz 40 C das $H(t)$ am Rande immer stetig ist, tritt das (Gl. 14, 15) schon dann ein, wenn $\varphi(0) \neq 0$ bzw. $\varphi(1) \neq 0$. Die Integraldarstellung des Satzes 40 D versagt also für $x = 0$ oder $x = 1$ nur dann nicht, wenn die dargestellte Funktion $\varphi(x)$ zu den bereits in Satz 40 C behandelten Funktionen gehört.

§ 3 : Eindeutigkeit der Integraldarstellung durch die $\hat{\varphi}(x, t)$.

Wir haben mit Satz 40 D gefunden, daß die Funktionalgleichung

$$(17) \quad \varphi(x) = \int_0^1 \hat{\varphi}(x, t) d\phi(t)$$

für positives, auf $<0, 1>$ ek. $\varphi(x)$ stets eine Lösung $\phi(t)$ hat. Es läßt sich darüberhinaus sogar zeigen

Satz 40 E : Die Funktionalgleichung (17) hat für positives, auf $<0, 1>$ ek. $\varphi(x)$ und für $0 < x < 1$ eine einzige monotone Lösung $\phi(t)$, wenn man monotone Lösungen $\phi(t)$, die sich nur in ihren Funktionswerten an Sprungstellen oder durch eine additive Konstante unterscheiden, nicht als verschieden ansieht.

Der Beweis verläuft ganz ähnlich wie der Beweis des entsprechenden Satzes bei Blaschke und Pick ⁶⁾. Deshalb sei hier darauf verwiesen.

X. Ungleichungen für Integrale,
in deren Integranden eine ek.
Funktion auftritt.

§ 1 : Zwei spezielle Sätze.

Einen ersten einfachen Satz kann man in wenigen Zeilen gewinnen. Ist $\varphi(x)$ positiv und auf $\langle 0,1 \rangle$ ek., dann gilt nach Satz 4

$$\varphi(x) \geq s(x) = \varphi(b) \frac{g(a,x)}{g(a,b)} + \varphi(a) \frac{g(b,x)}{g(b,a)} \quad \text{für } 0 \leq a \leq x \leq b \leq 1.$$

Da $L \langle s(x) \rangle = 0$, darf man mit (VII,10) schließen

$$\frac{W(x)}{\varphi^2(x)} \leq \frac{W(x)}{s^2(x)} = \frac{1}{s(a)} \left(\frac{g(a,x)}{s(x)} \right)'$$

Integriert man noch von a bis b , dann ist klar

Satz 41 : Falls $\varphi(x)$ positiv und auf $\langle 0,1 \rangle$ ek. ist, so gilt für $0 \leq a < b \leq 1$:

$$\int_a^b \frac{W(x)}{\varphi^2(x)} dx \leq \frac{g(a,b)}{\varphi(a)\varphi(b)}.$$

Der folgende Integralsatz wird einem durch (I,4) in Verbindung mit Satz 22 nahegelegt.

Satz 42 : Ist $\varphi(x)$ positiv und auf $\langle 0,1 \rangle$ ek. bezüglich $L \langle y \rangle \equiv (p \cdot y')' + q \cdot y$, so gilt für a, b mit $0 < a < b < 1$ stets

$$(1) \quad J_{\varphi}(a,b) \equiv \int_a^b [p \cdot \varphi'^2 - q \cdot \varphi^2] \cdot dx \geq [p \varphi \varphi']_a^b,$$

wo $\varphi'(x)$ eine verallgemeinerte Ableitung von $\varphi(x)$ ist.

Bew.: Den Ausdruck (1) gibt es nach Satz 26; wir nehmen zunächst einige identische Umformungen damit vor. - Es sei $w(x)$ die nach Def.1 existierende, stets positive Lösung von $L \langle y \rangle = 0$; daher ist

$$-q(x) = \frac{1}{w(x)} (p \cdot w')'.$$

In der Bezeichnungsweise der Behauptung ergibt sich daher

$$J_{\varphi}(a,b) = \int_a^b \left[p \varphi'^2 + (p w')' \frac{\varphi^2}{w} \right] dx$$

und daraus

$$(2) \quad J_{\varphi}(a,b) = \int_a^b p \cdot \left[\varphi'^2 - w' \left(\frac{\varphi^2}{w} \right)' \right] dx + \left[p w' \frac{\varphi^2}{w} \right]_a^b.$$

Schon in Satz 25 hatten wir die monotone Funktion μ_{φ} betrachtet; wegen $p \cdot w = \text{const} = C > 0$ ist

$$C \frac{\mu_{\varphi}}{p} = w \cdot \varphi' - \varphi \cdot w'.$$

Damit ergibt sich unter leichten Umformungen aus (2)

$$(2') \quad J_{\varphi}(a,b) = C Z_{\varphi}(a,b) + \left[p \varphi \varphi' \right]_a^b,$$

wenn man

$$(3) \quad Z_{\varphi}(a,b) = \int_a^b \mu_{\varphi} \left(\frac{\varphi}{w} \right)' dx - \left[\mu_{\varphi} \frac{\varphi}{w} \right]_a^b$$

setzt. Da $C > 0$ und wegen Satz 25 ist nur noch zu zeigen: Ist $\mu_{\varphi}(x)$ monoton nicht zunehmend, so ist $Z_{\varphi}(a,b) \geq 0$.

Sollte $\mu_{\varphi}(x)$ differenzierbar sein, so folgt diese Behauptung ganz einfach aus (3) durch partielle Integration. Doch auch im allgemeinen Fall, in dem man darüber nichts weiß, kommt man rasch zum Ziel. - Es gibt nämlich eine Zahl $\bar{\mu}$, die zwischen der unteren und oberen Grenze von $\mu_{\varphi}(x)$ in $\langle a, b \rangle$ liegt, mit der man (3) auf die Form

$$(3') \quad Z_{\varphi}(a,b) = \frac{\varphi(b)}{w(b)} (\bar{\mu} - \mu_{\varphi}(b)) + \frac{\varphi(a)}{w(a)} (\mu_{\varphi}(a) - \bar{\mu})$$

bringen kann. (Hierbei ist Satz 26 benutzt worden.) Ist nun $\mu_{\varphi}(x)$ monoton nicht zunehmend, so gilt

$$\mu_{\varphi}(a) \geq \bar{\mu} \geq \mu_{\varphi}(b);$$

dann folgt aus (3'): $Z_{\varphi}(a,b) \geq 0$, womit der Satz bewiesen ist.

§ 2 : Das Minimum der Funktion $H(t)$.

Gemeint ist die Funktion

$$(4) \quad H(t) = \int_0^1 \hat{\varphi}(x,t) h(x) dx.$$

Darin soll $h(x)$ eine jedenfalls nicht negative, beschränkte und im Riemannschen Sinne integrierbare Funktion sein. Mit Überlegungen, die denen im Beweis von Satz 32 ganz analog sind, kann man zeigen, daß $H(t)$ für $0 \leq t \leq 1$ stetig ist. Daher hat $H(t)$ in $\langle 0, 1 \rangle$ ein Minimum.

Gehört das $\hat{\varphi}(x,t)$ in $H(t)$ zu den konvexen Funktionen, d.h. zu $L \langle y \rangle \equiv y''$ (vgl. Bemerkung unter Def. 9), und ist ferner $h(x)$ konvex, so läßt sich zeigen ^{6), 8)}, daß $H(t)$ das Minimum in $t = 0$

oder in $t = 1$ annimmt. Das braucht im allgemeinen Fall nicht zu gelten. Dieser Sachverhalt sei durch ein Gegenbeispiel belegt.

Zu $L \langle y \rangle \equiv y'' - 36 \cdot y$ gehören, wie eine etwas langwierige Rechnung ergibt, die folgenden speziellen $\hat{\phi}$:

$$\hat{\phi}(x, \frac{1}{2}) = \begin{cases} 0,248 \cdot \sin 6x & \text{für } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 0,248 \cdot \sin 6(1-x) & \text{für } \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

$$\hat{\phi}(x, 0) = 0,0243 \sin 6(1-x) \quad , \quad \hat{\phi}(x, 1) = 0,0243 \sin 6x .$$

Die Funktion

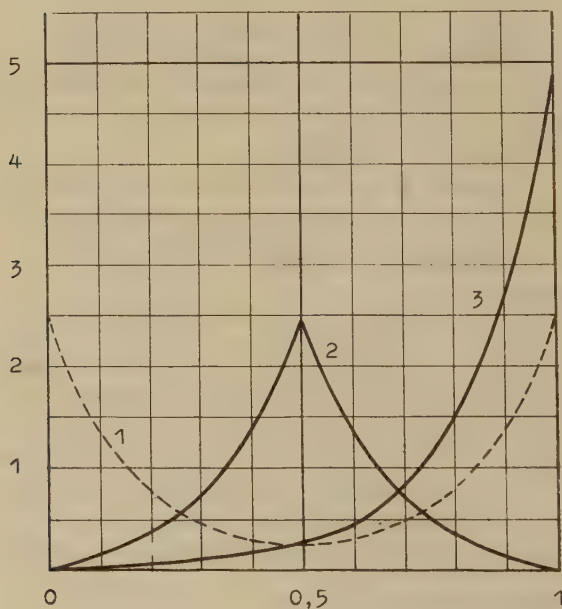
$$h(x) = 0,25 \cdot \ln 6 \left(\frac{1}{2} - x \right)$$

ist ek. bezüglich dem genannten L , da $L \langle h(x) \rangle \equiv 0$. Da offenbar nach (4) $H(0) = H(1)$, genügt der Nachweis, daß

$$H(1) = \int_0^1 \hat{\phi}(x, 1) \cdot h(x) \, dx > H\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^1 \hat{\phi}(x, \frac{1}{2}) \cdot h(x) \, dx .$$

Die Gültigkeit dieser Ungleichung entnimmt man aber bereits der Zeichnung. Eine weitere längere Rechnung liefert dann wirklich.

$$\frac{H(1)}{H\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{H(0)}{H\left(\frac{1}{2}\right)} = 3,39 .$$



- 1 : $y = h(x)$
- 2 : $y = \hat{\phi}(x, \frac{1}{2})$
- 3 : $y = \hat{\phi}(x, 1)$

Die durch (4) eingeführte, mit ek. $h(x)$ gebildete Funktion $H(t)$ braucht also weder in $t = 0$ noch in $t = 1$ ihr Minimum anzunehmen. Anders wird es, wenn man sich auf spezielle ek. $h(x)$ beschränkt, nämlich auf die $\hat{\varphi}(x, t)$:

Satz 43 : Es ist

$$\int_0^1 \hat{\varphi}(x, t) \hat{\varphi}(x, \tau) dx > \begin{cases} \int_0^1 \hat{\varphi}(x, 0) \hat{\varphi}(x, \tau) dx & \text{für } 0 < t \leq \tau \leq 1, \\ \int_0^1 \hat{\varphi}(x, 1) \hat{\varphi}(x, \tau) dx & \text{für } 0 \leq \tau \leq t < 1, \end{cases}$$

so daß insbesondere gilt

$$\int_0^1 \hat{\varphi}(x, t) \hat{\varphi}(x, \tau) dx > \int_0^1 \hat{\varphi}(x, 0) \hat{\varphi}(x, 1) dx \quad \text{für } (t, \tau) \neq (0, 1).$$

Bew.: Wir betrachten die Funktion

$$(5) \quad F(t, \tau) = \int_0^1 \hat{\varphi}(x, t) \hat{\varphi}(x, \tau) dx$$

in ihrer Abhängigkeit von t ; τ wird als Parameter angesehen. Die Behauptung ist ersichtlich bewiesen, wenn gezeigt ist:

$$(6) \quad F'_t(t, \tau) \begin{cases} > 0, & 0 < t \leq \tau \leq 1, \\ < 0, & 0 < \tau < t < 1. \end{cases}$$

Man schreibt (5) ausführlich, bildet $F'_t(t, \tau)$ und eliminiert die auftretenden Ableitungen von $K(t)$, $g(0, t)$, $g(1, t)$ mit (VII, 3) und (VII, 3'). Das führt auf

$$\frac{g(0, t)g(1, \tau)}{g(0, 1)W(t)} F'_t(t, \tau) = \int_t^{\tau} \hat{\varphi}^2(x, t) dx \int_0^t \hat{\varphi}(x, t) \hat{\varphi}(x, \tau) dx - \int_0^t \hat{\varphi}^2(x, t) dx \int_t^{\tau} \hat{\varphi}(x, t) \hat{\varphi}(x, \tau) dx.$$

Hierin ist der Faktor von $F'_t(t, \tau)$ negativ. Setzt man daher

$$(7) \quad G(s) = \int_s^1 \hat{\varphi}^2(x, t) dx \int_0^s \hat{\varphi}(x, t) \hat{\varphi}(x, \tau) dx - \int_0^s \hat{\varphi}^2(x, t) dx \int_s^1 \hat{\varphi}(x, t) \hat{\varphi}(x, \tau) dx,$$

so reduziert sich die Behauptung (6) auf die folgende:

$$(8) \quad G(t) \begin{cases} < 0, & 0 < t \leq \tau < 1, \\ > 0, & 0 < \tau < t < 1. \end{cases}$$

Nun ist $G(0) = G(1) = 0$; außerdem ist $G(s)$ stetig. Daher ist (8) bewiesen, wenn gezeigt ist

$$(9) \quad G'(s) < 0 \quad \text{für } 0 < s < t < \tau < 1 \quad \text{und} \quad 0 < \tau < t < s < 1.$$

Aus (7) ergibt sich unter Beachtung der Normierung der $\hat{\varphi}$:

$$G'(s) = \hat{\varphi}(s, t) \hat{\varphi}(s, \tau) - \hat{\varphi}^2(s, t) \int_0^1 \hat{\varphi}(x, t) \hat{\varphi}(x, \tau) dx,$$

und daraus, wieder infolge der Normierung der $\hat{\varphi}$,

$$(10) \quad G'(s) = \hat{\varphi}^2(s, t) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} \left[\frac{\hat{\varphi}(s, \tau)}{\hat{\varphi}(s, t)} - \frac{\hat{\varphi}(x, \tau)}{\hat{\varphi}(x, t)} \right] \hat{\varphi}^2(x, t) dx.$$

(Als Grenzwert geschrieben, weil der Integrand in dieser Form am Rande des Integrationsintervalls nicht existiert.)

An Hand von Def. 9 bestätigt man leicht, daß die Funktion

$$\frac{\hat{\varphi}(x, t_1)}{\hat{\varphi}(x, t_2)} \quad \text{mit } 0 < t_1 < t_2 < 1$$

1. für $0 < x < 1$ positiv und stetig,
2. für $0 < x \leq t_1$ und $t_2 \leq x < 1$ konstant,
3. für $t_1 \leq x \leq t_2$ monoton abnehmend

ist. Dies wendet man auf (10) an und erhält die Behauptung (9) in den beiden dort genannten Fällen.

§ 3 : Zum Satz von Frank.

Wir wenden uns der Verallgemeinerung der in (I, § 1) erwähnten Integralungleichung zu.

Satz 44 A : Unter allen nicht negativen, normierten, auf $\langle 0, 1 \rangle$ bzgl. $L \langle y \rangle$ ek. Funktionen $\varphi(x)$ macht die zu $L \langle y \rangle$ gehörige Funktion $\hat{\varphi}(x, t)$ (für ein $t = t^*$ oder für mehrere t) das Integral

$$\int_0^1 \varphi(x) \cdot h(x) dx$$

zu einem Minimum, wenn $h(x)$ eine für $0 \leq x \leq 1$ nicht negative, beschränkte und im Riemannschen Sinne integrierbare Funktion ist.

Die Behauptung besagt, daß es zu jedem $\varphi(x)$ mit den angegebenen Eigenschaften ein t (oder mehrere t) gibt derart, daß (Gl. (4))

$$\int_0^1 \varphi(x) \cdot h(x) dx \geq H(t).$$

Der Beweis erfolgt zunächst auf dem Wege, den M. Krafft ⁸⁾ eingeschlagen hat. (Hier würde es sogar genügen, von $h(x)$ nur die Integrierbarkeit im Lebesgueschen Sinne zu verlangen.)

Wir geben eine Zerlegung

$$\mathfrak{Z} : 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n < t_{n+1} = 1$$

von $\langle 0, 1 \rangle$ und beschreiben $\varphi(x)$ entweder nach Satz 29 die Funktion $P_\sigma(x)$ oder nach Satz 30 die Funktion $P_s(x)$ ein bzw. um. Die gewählte Funktion ($P_\sigma(x)$ oder $P_s(x)$) wird mit $P_n(x)$ bezeichnet. Der Satz 40 A liefert die Darstellung

$$(11) \quad P_n(x) = \sum_{j=0}^{n+1} c_j^{(n)} \hat{\varphi}(x, t_j) \quad (c_j^{(n)} \geq 0).$$

Das Minimum der durch Gl.(4) eingeführten Funktion $H(t)$ (oder eines ihrer Minima) liege in $t = t^*$. Bildet man nun mit (11)

$$\int_0^1 P_n(x) \cdot h(x) dx = \sum_{j=0}^{n+1} c_j^{(n)} \int_0^1 \hat{\varphi}(x, t_j) \cdot h(x) dx = \sum_{j=0}^{n+1} c_j^{(n)} H(t_j),$$

so folgt

$$(12) \quad \int_0^1 P_n(x) \cdot h(x) dx \geq H(t^*) \cdot \sum_{j=0}^{n+1} c_j^{(n)}.$$

Wir führen noch die zu $H(t)$ analoge Funktion

$$(13) \quad \Phi(t) = \int_0^1 \hat{\varphi}(x, t) \varphi(x) dx$$

ein. Da $\varphi(x)$ die an $h(x)$ gestellten Forderungen erfüllt, folgt aus der bereits bemerkten Stetigkeit von $H(t)$ die Stetigkeit von $\Phi(t)$; es gibt ein $t = t^{**}$ derart, daß

$$(13') \quad \Phi(t^{**}) = \text{Maximum } \Phi(t),$$

und dabei ist

$$(13'') \quad \Phi(t^{**}) \leq 1.$$

Dies folgt aus

$$\int_0^1 [\hat{\varphi}(x, t) - \varphi(x)]^2 dx \geq 0,$$

zusammen mit der Normierung von $\hat{\varphi}(x, t)$ und $\varphi(x)$. Mit (11) erhalten wir aus (13), (13'), (13'')

$$(14) \quad \int_0^1 P_n(x) \varphi(x) dx = \sum_{j=0}^{n+1} c_j^{(n)} \Phi(t_j) \leq \Phi(t^{**}) \sum_{j=0}^{n+1} c_j^{(n)} \leq \sum_{j=0}^{n+1} c_j^{(n)}.$$

Dies wird in (12) eingesetzt:

$$(15) \quad \int_0^1 P_n(x) \cdot h(x) dx \geq H(t^*) \int_0^1 P_n(x) \cdot \varphi(x) dx.$$

Nun gehen wir zu immer feinerer Zerlegung $\mathfrak{Z}$ über. Dabei approximiert $P_n(x)$ nach Satz 31 das $\varphi(x)$ gleichmäßig. Beachtet man noch die Normierung von $\varphi(x)$, so folgt aus (15)

$$\int_0^1 \varphi(x) \cdot h(x) dx \geq H(t^*).$$

Unser Satz ist damit bewiesen.

Sodann führen wir den Beweis noch einmal nach dem Beweisverfahren von Blaschke und Pick ⁶⁾, wobei man freilich ohne eine Zusatzvoraussetzung nicht auskommt. - Nach Satz 40 D gibt es eine Funktion $\Phi(t)$, die für $0 < x < 1$

$$\varphi(x) = \int_0^1 \hat{\varphi}(x, t) d\Phi(t)$$

macht. Wir werden zunächst zeigen, daß

$$(16) \quad M = \int_0^1 d\phi(t) \geq 1.$$

Da es auf den Wert des Integranden an den Randpunkten des Intervalls nicht ankommt, ist

$$1 = \int_0^1 \varphi^2(x) dx = \int_0^1 \left[\int_0^1 \hat{\varphi}(x,t) d\phi(t) \right] \cdot \left[\int_0^1 \hat{\varphi}(x,\tau) d\phi(\tau) \right] dx.$$

Anwendung der Stieltjes-Regel g führt zu

$$1 = \int_0^1 \left[\int_0^1 \left\{ \int_0^1 \hat{\varphi}(x,t) \hat{\varphi}(x,\tau) dx \right\} d\phi(t) \right] d\phi(\tau).$$

Hier ist nach der Schwarzschen Ungleichung und wegen der Normierung der $\hat{\varphi}$

$$\left\{ \int_0^1 \hat{\varphi}(x,t) \hat{\varphi}(x,\tau) dx \right\}^2 \leq \int_0^1 \hat{\varphi}^2(x,t) dx \int_0^1 \hat{\varphi}^2(x,\tau) dx = 1.$$

Da ϕ monoton nicht abnimmt, hat man

$$1 \leq \int_0^1 \left[\int_0^1 d\phi(t) \right] d\phi(\tau) = \left[\int_0^1 d\phi(t) \right]^2 = M^2,$$

so daß wirklich (16) gilt. Wir betrachten nun

$$\int_0^1 \varphi(x) h(x) dx = \int_0^1 \left[\int_0^1 \hat{\varphi}(x,t) d\phi(t) \right] h(x) dx.$$

Will man jetzt die Stieltjes-Regel g benutzen - und das muß man in diesem Beweisverfahren - dann muß man treffen die

Zusatzvoraussetzung: $h(x)$ soll sogar stetig sein,

und nicht nur integrierbar. Dann freilich folgt sofort

$$\begin{aligned} \int_0^1 \varphi(x) h(x) dx &= \int_0^1 \left[\int_0^1 \hat{\varphi}(x,t) h(x) dx \right] d\phi(t) \\ &= \int_0^1 H(t) d\phi(t) \geq H(t^*) \int_0^1 d\phi(t) = H(t^*) \cdot M \geq H(t^*), \end{aligned}$$

nach (16), und das ist erneut die Behauptung von Satz 44 A.

In beiden Beweisen dieses Satzes ist als t , für das

$$(17) \quad \int_0^1 \varphi(x) \cdot h(x) dx \geq H(t)$$

gilt, die Stelle (oder eine der Stellen) bestimmt worden, an der (oder an denen) $H(t)$ das Minimum annimmt. Wie aus dem Gegenbeispiel (§ 2) folgt, braucht dieses t weder 0 noch 1 zu sein - sogar dann nicht, wenn $h(x)$ als ek. vorausgesetzt wird. Wenn man allerdings die zur Konkurrenz zugelassenen Funktionen beschränkt, dann gilt

Satz 44 B: Unter allen nicht negativen, normierten, auf $<0,1>$ ek. Funktionen $\varphi(x)$, die Lösung von $L\langle y \rangle = 0$ sind, macht ent-

weder $\hat{\varphi}(x, 0)$ oder $\hat{\varphi}(x, 1)$ oder machen diese beiden Funktionen das Integral

$$\int_0^1 \varphi(x) \cdot h(x) \, dx$$

zu einem Minimum, wenn $h(x)$ eine für $0 \leq x \leq 1$ nicht negative, beschränkte, im Riemannschen Sinne integrierbare Funktion ist.

Bew.: Für die zugelassenen Funktionen $\varphi(x)$ ist (vgl. Bemerkung unter (VII, 13)) $m_{\varphi}(x_0, x)$ von x unabhängig, so daß nach (VII, 2)

$$m_{\varphi}(0, x) = \varphi(0) \quad , \quad m_{\varphi}(1, x) = \varphi(1) \quad .$$

Daher lauten (VIII, 4) und (VIII, 6) hier

$$(18) \quad \varphi(x) = K(0) \cdot \varphi(0) \cdot \hat{\varphi}(x, 0) + K(1) \cdot \varphi(1) \cdot \hat{\varphi}(x, 1) \quad ,$$

$$(19) \quad 1 \leq K(0) \cdot \varphi(0) + K(1) \cdot \varphi(1) \quad .$$

Mit (18) bilden wir unter Benutzung der in Gl. (4) eingeführten Bezeichnungsweise

$$\int_0^1 \varphi(x) \cdot h(x) \, dx = K(0) \cdot H(0) \cdot \varphi(0) + K(1) \cdot H(1) \cdot \varphi(1) \quad .$$

Hiermit und mit (19) führt man die Annahme

$$\int_0^1 \varphi(x) \cdot h(x) \, dx < H(0) \quad \text{und} \quad \int_0^1 \varphi(x) \cdot h(x) \, dx < H(1)$$

sofort zu einem Widerspruch; somit ist Satz 44 B bewiesen.

In voller Allgemeinheit gilt endlich

Satz 44 C: Sind $\varphi_1(x)$ und $\varphi_2(x)$ nicht negative, normierte, auf $<0, 1>$ ek. Funktionen, dann ist

$$\int_0^1 \varphi_1(x) \varphi_2(x) \, dx \geq \int_0^1 \hat{\varphi}(x, 0) \hat{\varphi}(x, 1) \, dx \quad .$$

Bew.: $\varphi_2(x)$ erfüllt die Forderungen, die in Satz 44 A an $h(x)$ gestellt worden sind, und daher ist

$$(20) \quad \int_0^1 \varphi_1(x) \varphi_2(x) \, dx \geq \int_0^1 \hat{\varphi}(x, \tau) \varphi_2(x) \, dx$$

für ein τ aus $<0, 1>$. Auch $\hat{\varphi}(x, \tau)$ erfüllt die an $h(x)$ gestellten Forderungen, so daß

$$(21) \quad \int_0^1 \hat{\varphi}(x, \tau) \varphi_2(x) \, dx \geq \int_0^1 \hat{\varphi}(x, \tau) \hat{\varphi}(x, t) \, dx$$

für ein t aus $<0, 1>$. Nach Satz 43 ist aber

$$(22) \quad \int_0^1 \hat{\varphi}(x, \tau) \hat{\varphi}(x, t) \, dx \geq \int_0^1 \hat{\varphi}(x, 0) \hat{\varphi}(x, 1) \, dx \quad .$$

Aus (20), (21), (22) folgt dann die Behauptung.

Der nächste Paragraph bringt nun eine spezielle Anwendung dieser Sätze.

§ 4 : Zur Entwicklung einer ek. Funktion nach den Eigen-
funktionen eines Randwertproblems.

Gegeben sei $L \langle y \rangle$. Es werde angenommen, daß es zu dem speziellen Sturm-Liouvilleschen Randwertproblem

$$(23) \quad L \langle y \rangle + \lambda y = 0, \quad y(0) = y(1) = 0$$

einen Eigenwert λ_1 mit folgenden Eigenschaften gibt:

$$1. \lambda_1 \geq 0.$$

$$(23') \quad 2. \text{ Die zu } \lambda_1 \text{ gehörige Eigenfunktion } y_1(x) \text{ wechselt in } \langle 0,1 \rangle \text{ ihr Vorzeichen nicht.}$$

Der Fall $\lambda_1 = 0$ kann nicht eintreten, weil es keine für $x = 0$ und $x = 1$ verschwindende Lösung von $L \langle y \rangle = 0$ gibt. Aus 1. folgt

$$(24) \quad \lambda_1 > 0.$$

Wegen 2. und (23) darf man annehmen

$$(25) \quad y_1(x) \geq 0 \text{ für } x \text{ aus } \langle 0,1 \rangle;$$

überdies sei $y_1(x)$ von vornherein normiert:

$$(26) \quad \int_0^1 y_1^2(x) dx = 1.$$

Aus (23), (24), (25) folgt, daß $L \langle y_1 \rangle \leq 0$, so daß nach Satz 22 $y_1(x)$ ek. bezüglich L ist. - Es sei nun vorgelegt eine nicht negative, normierte Funktion $\varphi(x)$, die auf $\langle 0,1 \rangle$ bezüglich L ek. ist. Wir bilden ihren zu $y_1(x)$ gehörigen Fourier-Koeffizienten

$$(27) \quad a_1 = \int_0^1 \varphi(x) \cdot y_1(x) dx.$$

Aus der Besselschen Ungleichung, d.h. hier unmittelbar aus

$$\int_0^1 [\varphi(x) - a_1 y_1(x)]^2 dx \geq 0,$$

mit (26), folgt $1 \geq a_1^2$, so daß hier auch $1 \geq a_1$.

Auf (27) kann Satz 44 A oder B angewendet werden; man findet

$$1 \geq a_1 \geq \int_0^1 \hat{\varphi}(x, t^*) \cdot y_1(x) dx > 0,$$

oder mit (23) und (24):

$$(28) \quad \left\{ \begin{array}{l} 1 \geq a_1 \geq -\frac{1}{\lambda_1} \int_0^1 \hat{\varphi}(x, t^*) \cdot L \langle y_1 \rangle dx > 0 \\ \text{für ein } t^* \text{ (oder für mehrere } t^*) \text{ aus } \langle 0,1 \rangle. \end{array} \right.$$

Es sei zunächst $0 < t^* < 1$. Da für $\langle 0, t^* \rangle$ und für $\langle t^*, 1 \rangle$ das $\hat{\varphi}(x, t^*)$ je eine Lösung von $L \langle y \rangle = 0$ ist, kann man das Integral nach der Lagrangeschen Identität (VI,1) auswerten. Eine einfache Zwischenrechnung ergibt

$$(29) \quad 1 \geq a_1 \geq \frac{\hat{\varphi}(t^*, t^*)}{g(0, t^*) g(t^*, 1)} \cdot \frac{y_1(t^*)}{\lambda_1} > 0 \quad \text{für } 0 < t^* < 1.$$

Man findet analog

$$(29') \quad 1 \geq a_1 \geq \hat{\varphi}(0,0) p(0) \frac{y_1'(0)}{\lambda_1} > 0 \quad \text{für } t^* = 0 ,$$

$$(29'') \quad 1 \geq a_1 \geq \hat{\varphi}(1,1) p(1) \frac{(-y_1'(1))}{\lambda_1} > 0 \quad \text{für } t^* = 1 .$$

So hat sich ergeben

Satz 45 : Auf Grunde der Forderungen (23') gibt es zum Randwertproblem (23) einen positiven Eigenwert derart, daß die zugeordnete Eigenfunktion $y_1(x)$ nicht negativ, normiert und ek. bezüglich L ist. Ist dann $\varphi(x)$ eine beliebige nicht negative, normierte und bezüglich L ek. Funktion, so gilt für den zu $y_1(x)$ gehörigen Fourier-Koeffizienten a_1 von $\varphi(x)$, nämlich für

$$a_1 = \int_0^1 \varphi(x) \cdot y_1(x) dx ,$$

die Ungleichung (29), (29') oder (29''), je nachdem, wie nach Satz 44 A oder B das t^* ausfällt, für welches gilt

$$\int_0^1 \varphi(x) \cdot y_1(x) dx \geq \int_0^1 \hat{\varphi}(x, t^*) \cdot y_1(x) dx .$$

Im Spezialfall konvexer Funktionen lautet (23)

$$y'' + \lambda \cdot y = 0 \quad , \quad y(0) = y(1) = 0 ;$$

es ist $p(x) = 1$. Ein den Forderungen (23') genügender Eigenwert ist

$$\lambda_1 = \pi^2$$

mit der zugeordneten nicht negativen, normierten und konvexen Eigenfunktion

$$y_1(x) = \sqrt{2} \cdot \sin \pi x .$$

Ferner ist für konvexe Funktionen (VIII, § 1)

$$\hat{\varphi}(0,0) = \hat{\varphi}(1,1) = \sqrt{3} ,$$

und außerdem ^{6), 8)}

$$t^* = 0 \quad \text{oder} \quad t^* = 1 .$$

So folgt aus (35') oder (35'') speziell für konvexe Funktionen

$$1 \geq a_1 \geq \frac{\sqrt{6}}{\pi}$$

oder

$$1 \geq a_1 \geq 0,78 ,$$

in Übereinstimmung mit Ph. Frank ⁶⁾ .

XI. A n h a n g .

Benutzte Regeln über Stieltjes - Integrale .

a. Das Integral $\int_a^b f(x) \cdot dg(x)$ existiert, wenn $f(x)$ in $\langle a, b \rangle$ stetig und $g(x)$ monoton (oder auch nur von beschränkter Schwankung) ist, und umgekehrt. Sollte $f(x)$ an einer Stelle des Integrationsintervalls unstetig, jedoch in einer Umgebung derselben beschränkt sein, so existiert das Integral nur dann, wenn $g(x)$ daselbst stetig ist.

b. Ist $f(x)$ nicht negativ, $g(x)$ monoton nicht abnehmend, so gilt für $a < \xi$

$$F(\xi) = \int_a^{\xi} f(x) \cdot dg(x) \geq 0 ,$$

und $F(\xi)$ ist monoton nicht abnehmend.

c. Ist für ξ aus $\langle a, b \rangle$

$$\int_c^{\xi} f_1(x) \cdot dg_1(x) = \int_c^{\xi} f_2(x) \cdot dg_2(x) ,$$

so gilt

$$\int_a^b f(x) \cdot f_1(x) \cdot dg_1(x) = \int_a^b f(x) \cdot f_2(x) \cdot dg_2(x) .$$

d. Ist $f(x)$ stetig differenzierbar, $g(x)$ monoton, dann gilt

$$\int_a^b f(x) \cdot dg(x) = \left[f(x) \cdot g(x) \right]_a^b - \int_a^b g(x) \cdot f'(x) \cdot dx .$$

e. Es ist für

$$F(\xi) = \int_a^{\xi} f(x) \cdot dg(x)$$

$$F(\xi) = F(\xi + 0) - f(\xi) \cdot [g(\xi + 0) - g(\xi)]$$

$$F(\xi - 0) + f(\xi) \cdot [g(\xi) - g(\xi - 0)] .$$

$F(\xi)$ ist also dort stetig, wo $g(\xi)$ stetig ist.

f. Ist $f(x)$ stetig und $g(x)$ monoton, so gibt es ein ξ aus $\langle a, b \rangle$, für das

$$\int_a^b f(x) \cdot dg(x) = f(\xi) \cdot [g(b) - g(a)] .$$

g. Ist $F(x, t)$ für $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq t \leq 1$ beschränkt und für $0 < x < 1$, $0 \leq t \leq 1$ stetig, und ist $g(t)$ für $0 \leq t \leq 1$ monoton, so gilt

$$\int_0^1 \left[\int_0^1 F(x, t) \cdot dg(t) \right] \cdot dx = \int_0^1 \left[\int_0^1 F(x, t) \cdot dx \right] \cdot dg(t) .$$

L e b e n s l a u f .

Am 29. Juli 1928 wurde ich, Uwe Troltenier, evangelischer Konfession und deutscher Staatsangehörigkeit, zu Eversmeer, Kreis Wittmund (Ostfriesland), geboren. Mein Vater ist der Hauptlehrer Willy Troltenier, meine Mutter seine Ehefrau Waldtraut, geborene Bordeck.

Von Ostern 1934 bis Ostern 1940 besuchte ich die Volksschule zu Nordseebad Juist, danach die Aufbauschule zu Bederkesa bei Bremerhaven, und vom Sommer 1943 an die Herzog Heinrich-Schule zu Barby an der Elbe. Im November 1944 wurde ich zum Reichsarbeitsdienst, im Januar 1945 zur Wehrmacht (Heer) einberufen. Nach Ausheilung einer Kriegsverletzung trat ich im März 1946 in die Friedrich von Bodelschwingh-Schule zu Bethel bei Bielefeld ein, wo ich im Juli 1947 die Reifeprüfung ablegte.

Zum Sommer-Semester 1948 bezog ich die Philipps-Universität zu Marburg, wo ich bis zum Sommer-Semester 1952 Mathematik und Physik studierte. Ich nahm an den Vorlesungen und Übungen der folgenden Herren Professoren und Dozenten teil: Becker, Dietzel, Düker, Flügge, Hückel, Krafft, Meerwein, Ostmann, Reich, Reidemeister, Rothstein, Arnold Schmidt, Vogt, Walcher, Zühlke. Ihnen allen bin ich aufrichtig dankbar. Besonderen Dank schulde ich meinem verehrten Lehrer, Herrn Professor Dr. Krafft, der mir auch bei der Abfassung dieser Arbeit wertvolle Ratschläge erteilte.

Im April 1951 bestand ich die Diplom-Vorprüfung, im Mai 1952 die Diplom-Hauptprüfung für Mathematiker und im Juli 1952 die Staatsprüfung für das Höhere Lehramt.

Seit dem 1. Februar 1953 bin ich in der Technischen Abteilung der Farbwerke Hoechst AG., Frankfurt(Main)-Hoechst, als Mathematiker tätig.

Uwe Troltenier.

